Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 15/12/23.

Forme bilineari simmetriche

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 .$$

Fissiamo la base canonica $\mathcal{E}$.
Sia $b(\ ,\ )$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_4 + u_4v_3 \tag{1}$$

1. Scrivere la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base canonica, $A_b^{\mathcal{E}}$.
Verificare che $b(\ ,\ )$ è non degenere.

Soluzione 1. b ha matrice simmetrica associata nella base canonica

$$A_b^{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Poniamo $A := A_b^{\mathcal{E}}$. Si verifica che il determinante di A è diverso da zero (è uguale a 1); ne segue che $rg(b) = 4$ e quindi b è non degenere.

2. Definire a partire da $b(\ ,\ )$ un endomorfismo simmetrico T in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$.

Soluzione 2. Consideriamo L_A; L_A ha matrice associata nella base canonica uguale ad A che è simmetrica e quindi, essendo la base canonica ortonormale rispetto a $\bullet$, ne segue che $T := L_A$ è simmetrico in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$

3. Determinare indice di positività ed indice di negatività di b.

4. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ costituita da autovettori per T.

5. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\ ,\ )$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\mathcal{H}}$ sia diagonale. Determinare una base di Sylvester e cioè una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{B}}$ sia nella forma di Sylvester.

Soluzione 3 + 4 + 5.

Consideriamo $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Si verifica facilmente che gli autovalori di A sono 1 e -1 entrambi con molteplicità algebrica 2 (per il teorema spettrale questa è anche la molteplicità geometrica.). Per quanto visto a lezione sappiamo che una base ortonormale di autovettori per L_A, certamente esistente per il teorema spettrale, diagonalizza simultaneamente $b(\ ,\ )$ e L_A. In tale base la matrice associata a $b(\ ,\ )$ è quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che b ha indice di positività 2 ed indice di negatività 2. Già sappiamo che l'indice di nullità è zero perché b è non-degenere. Notare che per questo passaggio

(determinazione degli indici) non è necessario calcolare alcun autovettore; inoltre qui abbiamo calcolato facilmente gli autovalori ma in generale ci serviremmo del criterio di Cartesio.
Consideriamo i due autospazi associati rispettivamente a 1 e -1. Con qualche semplice conto vediamo che $V_A(1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = 0 \text{ e } -x_3 + x_4 = 0\}$ e che $V_A(-1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = 0 \text{ e } x_3 + x_4 = 0\}$. Una base ortonormale di $V_A(1)$ è data da

$$\underline{h}_1 = (1, 0, 0, 0)\,, \quad \underline{h}_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

e una base ortonormale di $V_A(-1)$ è data da

$$\underline{h}_3 = (0, 1, 0, 0)\,, \quad \underline{h}_4 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/-\sqrt{2})\,.$$

Dato che per un operatore simmetrico autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali, deduciamo che i 4 vettori $\{\underline{h}_1, \underline{h}_2, \underline{h}_3, \underline{h}_4\}$ sono una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per L_A.
Sia

$$O := M_{\mathcal{E},\mathcal{H}}(\mathrm{id})$$

Per definizione O è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{h}_j$ nella base canonica; quindi

$$O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

Allora O è ortogonale (perché la base $\mathcal{H}$ è ortonormale) e quindi

$$A_b^{\mathcal{H}} = O^T A_b^{\mathcal{E}} O \equiv O^T A O = O^{-1} A O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo utilizzato la formula magica per le matrici associate ad una forma bilineare simmetrica in due basi diverse, nella seconda il fatto che O è una matrice ortogonale e nella terza il fatto che $\mathcal{H}$ è una base di autovettori per L_A.
Notiamo che in questo caso la base di autovettori è anche una base di Sylvester, non dobbiamo riscalare i vettori.

6. Facoltativo.
Determinare una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\,,\,)$. *Suggerimento.* Sicuramente dovete fissare una base $\mathcal{G}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\,,\,)$?

Soluzione 6. Basterà prendere una base di autovettori $\mathcal{G}$ per l'operatore $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che *non* sia ortonormale perché allora la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})$ non sarà ortogonale e non potremo asserire che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})^T A M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})^{-1} A M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{id})$$

Dato che $V_A(1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = 0 \text{ e } -x_3 + x_4 = 0\}$ e che $V_A(-1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = 0 \text{ e } x_3 + x_4 = 0\}$, basterà scegliere $\underline{g}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\underline{g}_2 = (2, 0, 0, 0)$ e poi $\underline{g}_3 = (0, 1, 0, 0)$ $\underline{g}_4 = (0, 1, -1, 1)$. Dobbiamo verificare che non succeda qualche miracolo e cioè che la matrice di b rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_4\}$ sia effettivamente non-diagonale: ed infatti $b(\underline{g}_2, \underline{g}_1) = 2 \neq 0$ e abbiamo finito perché $\mathcal{G}$ è una base di autovettori per L_A che però non diagonalizza b.

7 Un vettore $\underline{v}$ è detto isotropo per una forma bilineare simmetrica $b(\, , \,)$ se vale $b(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.
Vero o Falso: *dato che b è non-degenere, non esistono vettori isotropi.*

Soluzione 7. Falso. Un vettore isotropo $\underline{v}$ è un vettore tale che $b(\underline{v}, \underline{v}) = 0$. Il fatto che b sia non degenere ci dice che non esistono vettori $\underline{v}$ tali che $b(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ per **tutti** i vettori $\underline{w} \in V = \mathbb{R}^4$, il che è diverso. Ed infatti il vettore $(1, -1, 0, 0)$ è isotropo pur essendo b non-degenere.

8. Determinare equazioni cartesiane di due sottospazi W_+ e W_- tali che la restrizione di b a W_+ (rispettivamente W_-) sia definita positiva (risp. negativa).

Soluzione 8. $W_+ = \text{Span}\{\underline{h}_1, \underline{h}_2\}$. Infatti b ristretta a tale sottospazio ha matrice associata nella base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ uguale a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

quindi su W_+ cosí definito b è definita positiva, perché c'è una base di Sylvester in cui la matrice ha tutti i coefficienti sulla diagonale uguali ad 1. Analogamente $W_- = \text{Span}\{\underline{g}_3, \underline{g}_4\}$ è un sottospazio su cui b è definita negativa. Le equazioni cartesiane per W_+ sono

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

le equazioni cartesiane per W_- sono

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

Spazi vettoriali metrici

Osservazione. Dato uno spazio vettoriale metrico $(V, < \, , \, >)$ ed un sottospazio $U \leq V$ abbiamo visto che esiste una decomposizione in somma diretta

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Abbiamo definito la proiezione ortogonale su U, P_U, nel modo seguente: se $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ è una base ortonormale di U allora

$$P_U(\underline{v}) := < \underline{v}, \underline{u}_1 > \underline{u}_1 + \cdots + < \underline{v}, \underline{u}_r > \underline{u}_r \, , \quad \underline{v} \in V \, .$$

Abbiamo visto [1] che P_U è la proiezione su U parallelamente ad $U^{\perp}$ rispetto alla decomposizione $V = U \oplus U^{\perp}$. Analogamente la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$, $P_{U^{\perp}}$, risulta essere uguale alla proiezione su $U^{\perp}$ parallelamente a U. Possiamo allora anche definire la simmetria ortogonale rispetto a U, denotata S_U; questa è, per definizione, la simmetria rispetto ad U parallelamente ad $U^{\perp}$. Analogamente possiamo definire la simmetria ortogonale rispetto a $U^{\perp}$ (e cioè la simmetria rispetto a $U^{\perp}$ parallelamente a U).
Rivedete le relazioni che intercorrono fra questi 4 operatori (Quinto foglio di esercizi, del 24/10/2023). Se U è un iperpiano allora S_U è spesso chiamata la *riflessione* rispetto a U.

[1] era un esercizio del compito del 14/12

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

- Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica (quindi: base di partenza = base di arrivo = base canonica).
- Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di proiezione ortogonale sul piano $\sigma^\perp$.

Soluzione. Come già visto in esercizi precedenti $\sigma^\perp$ ha equazioni cartesiane che si ottengono traducendo in coordinate le due relazioni

$$\begin{cases} <\underline{x}, \underline{v}_1>= 0 \\ <\underline{x}, \underline{v}_2>= 0 \end{cases}$$

e quindi $\sigma^\perp$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ e quindi

$$\{\frac{\underline{v}_1}{||\underline{v}_1||}, \frac{\underline{v}_2}{||\underline{v}_2||}\}$$

è una base *ortonormale* di σ. Poniamo $\underline{f}_j = \underline{v}_j/||\underline{v}_j||$. Sappiamo che

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2 \underline{v}$$

Per scrivere la matrice associata a P_U nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ dobbiamo calcolare $P_U(\underline{e}_j)$, $j = 1, \ldots, 4$ utilizzando la formula precedente; i vettori ottenuti, espressi ovviamente nella base canonica, ci danno le colonne della matrice cercata. Con qualche conto si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^6, \bullet)$ e sia U l'iperpiano di equazioni

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

Determinare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^6$ all'operatore di proiezione ortogonale su U.
Determinare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^6$ all'operatore di simmetria ortogonale rispetto a U.
Suggerimento: siate furbe/i, proiettare ortogonalmente su una retta è più semplice che proiettare ortogonalmente su un sottospazio di dimensione 5.

Soluzione.
Sappiamo $U^\perp$ è un sottospazio di dimensione 1 ed è quindi generato da un unico vettore non nullo. Sappiamo anche che un generatore è dato da $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (già visto nel compito del 14/12). È più semplice determinare la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp})$

perché poi si ha $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_U) = I_6 - M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp})$ (già visto il 24/10). Ma sappiamo da (i) che

$$U^\perp = \mathbb{R}\underline{a}$$

con $\underline{a} = (1,1,1,1,1,1)$. Quindi

$$\frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

è una base ortonormale di $U^\perp$ e si ha quindi, dalla usuale formula per la proiezione ortogonale,

$$P_{U^\perp}(\underline{x}) = (\underline{x} \bullet \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|})\frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|}\ .$$

Calcoliamo allora $P_{U^\perp}\underline{e}_j$. Si ha

$$P_{U^\perp}\underline{e}_j = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall j = 1, \dots, 6.$$

La matrice di $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp})$ ha per colonne i vettori $P_{U^\perp}(\underline{e}_j)$, quindi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

da cui

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_U) = I_6 - M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 5 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 5 \end{pmatrix}.$$

Da quanto visto nel compito del 24/10 si ha poi:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S_U) = I_6 - 2M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_{U^\perp})$$

e si tratta ora di fare un semplice conto.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ con coordinate associate (x_0, x_1, x_2) e consideriamo il prodotto scalare definito positivo

$$< P, Q >:= \int_{-1}^{1} P(s)Q(s)ds$$

Consideriamo il vettore $1-X$ e la retta $\mathbb{R}(1-X)$. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $(\mathbb{R}(1-X))^\perp$.
Suggerimento: l'ortogonale di una retta in V è un piano, perché V ha dimensione 3; ci aspettiamo quindi una sola equazione $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$.

Soluzione.
Un vettore $x_0 + x_1X + x_2X^2$ appartiene a $(\mathbb{R}(1-X))^\perp$ se e solo se

$$< x_0 + x_1X + x_2X^2, 1 - X >= 0$$

se e solo se

$$\int_{-1}^{1}(x_0 + x_1 s + x_2 s^2)(1-s)\, ds = 0$$

se e solo se

$$\int_{-1}^{1}(x_0 + (-x_0 + x_1)s + (-x_1 + x_2)s^2 - x_2 s^3)ds \;=\; 0$$

se e solo se

$$x_0 \int_{-1}^{1} ds + (-x_1 + x_2) \int_{-1}^{1} s^2 ds \;=\; 0$$

(l'integrale è lineare; inoltre l'integrale definito da -1 a 1 di una funzione dispari è zero), se e solo se

$$x_0 2 + (-x_1 + x_2)\frac{2}{3} = 0$$

Conclusione: le equazioni cartesiane di $(\mathbb{R}(1-X))^{\perp}$ nella base canonica sono

$$3x_0 - x_1 + x_2 = 0\,.$$