**Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.**
**Geometria. Canale 3.**
**Compito a casa del 14/12/23.**

**Esercizio 1** Spazio vettoriale metrico $\mathcal{V}_O$ con base *ortonormale* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate $(x, y, z)$. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta vettoriale ortogonale al piano generato dai vettori $\underline{w}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$.
*Suggerimento. Per le equazioni cartesiane: un vettore è ortogonale a tutti i vettori del piano se e solo se è ortogonale ai vettori di una base del piano. Per le equazioni parametriche: passate ad equazione cartesiane del piano e consultare le note sul prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$, alla fine.*

**Esercizio 2.** Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$\underline{x} \bullet \underline{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \equiv \underline{y}^T \cdot \underline{x}\,.$$

**(i).** Determinare una base ortonormale del sottospazio $U$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**(ii)** Determinare poi equazioni cartesiane per $U^\perp$.
Suggerimento per (ii): come nell'esercizio 1, un vettore è ortogonale a tutti i vettori di $U$ se e solo se è ortogonale ai vettori di una base di $U$.

**Esercizio 3.** Vi ricordo che se $V$ è uno spazio vettoriale metrico e $U$ è un sottospazio con base ortonormale $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ allora la proiezione ortogonale su $U$ è l'applicazione lineare $P_U : V \to V$

$$P_U(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{u}_1 > \underline{u}_1 + \cdots + < \underline{v}, \underline{u}_r > \underline{u}_r\,.$$

Verificate che $P_U$ coincide con l'operatore di proiezione su $U$ parallelamente a $U^\perp$ rispetto alla decomposizione in somma diretta $V = U \oplus U^\perp$.

**Esercizio 4.** Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano $\sigma$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

Determinare equazioni cartesiane per $\sigma^\perp$.

**Esercizio 5.** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione $n$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ ortonormale con coordinate associate $\underline{x}$. Sia $U$ un sottospazio di dimensione $n - 1$ di equazioni cartesiane

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

con $a_j$ non tutti nulli.
Verificare che la retta $U^\perp$ è generata dal vettore di coordinate $(a_1, \dots, a_n)$.
(Il caso di $\mathcal{V}_O$ è trattato nelle mie brevi note sullo spazio vettoriale metrico $\mathcal{V}_O$.)