

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 14/12/23. Soluzioni.

Esercizio 1 Spazio vettoriale metrico \mathcal{V}_O con base *ortonormale* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z) . Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta vettoriale ortogonale al piano generato dai vettori $\underline{w}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{w}_2 = (0, 1, -1)$.

Suggerimento. Per le equazioni cartesiane: un vettore è ortogonale a tutti i vettori del piano se e solo se è ortogonale ai vettori di una base del piano. Per le equazioni parametriche: passate ad equazione cartesiana del piano e consultare le note sul prodotto scalare in \mathcal{V}_O , alla fine.

Soluzione.

Per determinare le equazioni parametriche della retta ortogonale al piano $\text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ basta scrivere l'equazione cartesiana $ax + by + cz = 0$ del piano $\text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ e prendere la retta generata dal vettore che ha coordinate (a, b, c) ¹. L'equazione cartesiana del piano è $x - y - z = 0$. La retta è data quindi da $\text{Span}(1, -1, -1)$ da cui si ricavano subito le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$$

Per le equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $W := \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ ragioniamo come segue, seguendo il suggerimento:

$$(x, y, z) \perp W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp \underline{v}, \forall \underline{v} \in W \Leftrightarrow (x, y, z) \perp (1, 1, 0) \text{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1)$$

Ma

$$(x, y, z) \perp (1, 1, 0) \text{ e } (x, y, z) \perp (0, 1, 1) \Leftrightarrow \\ \langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \text{ e } \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0$$

e svolgendo i due prodotti scalari otteniamo finalmente le due equazioni cartesiane per la retta ortogonale:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$\underline{x} \bullet \underline{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \equiv \underline{y}^T \cdot \underline{x}.$$

(i). Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(ii) Determinare poi equazioni cartesiane per U^\perp .

Suggerimento per (ii): come nell'esercizio 1, un vettore è ortogonale a tutti i vettori di U se e solo se è ortogonale ai vettori di una base di U .

¹Vedere le Note sul prodotto scalare in \mathcal{V}_O

Soluzione. Una base per il sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

è ad esempio $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$ che è anche ortogonale, come subito si verifica. Basta quindi normalizzare, cioè dividere per le rispettive lunghezze, per ottenere una base ortonormale di U . Se avessimo fissato una base di U non-ortogonale, ad esempio $\underline{v}_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\underline{v}_2 = (0, -1, 0, 1)$ avremmo dovuto ortogonalizzarla, considerando quindi la coppia $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2$ data da

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_1, \quad \underline{v}'_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{v}'_1 \rangle}{\langle \underline{v}'_1, \underline{v}'_1 \rangle} \underline{v}'_1$$

che è uguale a

$$\underline{v}'_1 = (1, 1, -1, -1), \quad \underline{v}'_2 = (0, -1, 0, 1) - \frac{(-2)}{4}(1, 1, -1, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$\{\underline{v}'_1, \underline{v}'_2\}$ è una base ortogonale; considerando

$$\left\{ \frac{1}{\|\underline{v}'_1\|} \underline{v}'_1, \frac{1}{\|\underline{v}'_2\|} \underline{v}'_2 \right\}$$

si ottiene una base ortonormale. Le equazioni cartesiane per U^\perp sono ottenute sfruttando l'osservazione fatta nel suggerimento dell'esercizio 1: un vettore \underline{x} appartiene ad U^\perp sse è ortogonale sia a $\underline{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$ che a $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, -1)$, quindi se e solo se

$$\begin{cases} \langle \underline{x}, \underline{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \underline{x}, \underline{u}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e queste sono proprio equazioni cartesiane per U^\perp .

Esercizio 3. Vi ricordo che se V è uno spazio vettoriale metrico e U è un sottospazio con base ortonormale $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ allora la proiezione ortogonale su U è l'applicazione lineare $P_U : V \rightarrow V$

$$P_U(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 + \dots + \langle \underline{v}, \underline{u}_r \rangle \underline{u}_r.$$

Verificate che P_U coincide con l'operatore di proiezione su U parallelamente a U^\perp rispetto alla decomposizione in somma diretta $V = U \oplus U^\perp$.

Soluzione. Fissiamo la base

$$\mathcal{G} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-r}\}$$

con $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-r}\}$ una qualsiasi base di U^\perp . Per l'operatore di proiezione su U parallelamente a U^\perp , chiamiamolo P , abbiamo, per definizione,

$$P\underline{u}_1 = \underline{u}_1, \dots, P\underline{u}_r = \underline{u}_r; \quad P\underline{w}_1 = \underline{0}, \dots, P\underline{w}_{n-r} = \underline{0}.$$

Per l'operatore P_U abbiamo

$$P_U(\underline{u}_1) = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 + \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2 + \dots + \langle \underline{u}_1, \underline{u}_r \rangle \underline{u}_r = \underline{u}_1$$

dato che la base $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ di U è ortonormale. Analogamente $P_U(\underline{u}_j) = \underline{u}_j$, $j \in \{2, \dots, r\}$. Dato poi che $\underline{w}_k \in U^\perp$ abbiamo, sempre dalla formula esplicita che definisce P_U , $P_U(\underline{w}_k) = \underline{0}$, $k \in \{1, \dots, n-r\}$. Quindi P e P_U agiscono allo stesso modo sui vettori della base \mathcal{G} ; dato che un operatore lineare è univocamente determinato dai valori che assume su una base, possiamo concludere che $P = P_U$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \quad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

Determinare equazioni cartesiane per σ^\perp .

Soluzione. Come già visto in esercizi precedenti σ^\perp ha equazioni cartesiane che si ottengono traducendo in coordinate le due relazioni

$$\begin{cases} \langle \underline{x}, \underline{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \underline{x}, \underline{v}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

e quindi σ^\perp ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ e quindi

$$\left\{ \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}, \frac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|} \right\}$$

è una base *ortonormale* di σ . Poniamo $\underline{f}_j = \underline{v}_j / \|\underline{v}_j\|$. Sappiamo che

$$P_U(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \underline{f}_1 \rangle \underline{f}_1 + \langle \underline{v}, \underline{f}_2 \rangle \underline{f}_2$$

Per scrivere la matrice associata a P_U nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ dobbiamo calcolare $P_U(\underline{e}_j)$, $j = 1, \dots, 4$ utilizzando la formula precedente; i vettori ottenuti, espressi ovviamente nella base canonica, ci danno le colonne della matrice cercata. Con qualche conto si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Esercizio 5. Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale metrico di dimensione n . Fissiamo una base \mathcal{B} ortonormale con coordinate associate \underline{x} . Sia U un sottospazio di dimensione $n-1$ di equazioni cartesiane

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

con a_j non tutti nulli.

Verificare che la retta U^\perp è generata dal vettore di coordinate (a_1, \dots, a_n) .

(Il caso di \mathcal{V}_O è trattato nelle mie brevi note sullo spazio vettoriale metrico \mathcal{V}_O .)

Soluzione.

Sappiamo che U ha dimensione $n-1$; ne segue che U^\perp è un sottospazio di dimensione 1 ed è quindi generato da un unico vettore non nullo. Vogliamo verificare che il vettore \underline{a} di coordinate (a_1, \dots, a_n) è un tale generatore; basta verificare che il

prodotto scalare di \underline{a} con un generico vettore di U è nullo; ma se $\underline{u} \in U$ ha coordinate \underline{x} allora da una parte

$$\langle \underline{a}, \underline{u} \rangle = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

(perché abbiamo fissato una base di V ortonormale) e dall'altra

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

perché le coordinate \underline{x} di \underline{u} verificano l'equazione di U . Concludiamo che $\langle \underline{a}, \underline{u} \rangle = 0$ e quindi che $\underline{a} \in U^\perp$; dato che è non nullo, ne è un generatore.