Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 7/12/23. Soluzioni.

Esercizi sul prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^3 \equiv \mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Fate riferimento alle brevi note che ho caricato sulla pagina web del corso. Un vettore $\underline{v}$ verrà denotato tramite le sue coordinate.

Esercizio 1. Sia $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ con $\underline{w}$ di coordinate $(1, -1, 1)$ rispetto alla base ortonormale fissata di $\mathcal{V}_O$. Determinare le coordinate dei due versori di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore $\underline{j}$ della base fissata.

Soluzione. Un vettore non nullo della retta W è il vettore $\underline{v} = (1, -1, 1)$. Dunque i versori di W sono $\underline{v}_1 = \underline{v}/\|\underline{v}\| = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\underline{v}_2 = -\underline{v}/\|\underline{v}\| = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Per determinare quale tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ formi un angolo acuto con il versore $\underline{j}$, basta ricordarsi che due vettori formano un angolo acuto se e solo se il coseno dell'angolo che formano è positivo, ovvero se e solo se il loro prodotto scalare è positivo. Si calcola immediatamente $\langle \underline{v}_1, \underline{j} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\langle \underline{v}_2, \underline{j} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dunque il versore richiesto è $\underline{v}_2$. In alternativa, le coordinate di un *versore* sono i coseni degli angoli che questo forma con gli elementi della base ortonormale fissata. Se dobbiamo scegliere il coseno dell'angolo con $\underline{j}$ positivo, allora dobbiamo scegliere il versore con seconda coordinata positiva, cioè $\underline{v}_2$.

Esercizio 2. Sia $W \leq \mathcal{V}_O$ la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Soluzione. Una base di W è data dal vettore $(1, 1, 0)$. Ne segue che i vettori di W sono tutti e soli i vettori con coordinate $(\lambda, \lambda, 0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = 2$, ovvero quelli con $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori di coordinate $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Esercizio 3. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_2)$. (Leggere attentamente le mie note, la soluzione dell'esercizio segue da una formula dimostrata nelle note....).

Soluzione. Si ha $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{150}} - \frac{2}{\sqrt{150}} = 0$ e quindi i due vettori sono ortogonali. Inoltre,

$$||\underline{f}_1|| = 1\,, \quad ||\underline{f}_2|| = 1$$

e quindi i due vettori sono ortonormali. Dato che le coordinate di $\underline{f}_1$ e quelle di $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione del piano, concludiamo che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ costituiscono una base ortonormale del piano σ.

Per (ii): sappiamo che per ogni vettore del piano si ha, dall'ortonormalità di $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$,

$$\underline{u} = \langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle \underline{f}_1 + \langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle \underline{f}_2$$

che è appunto del tipo $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_2)$. Si tratta allora di fare i due prodotti scalari. Facendo i conti otteniamo $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = -1/\sqrt{5}$ e $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = 12/\sqrt{30}$; quindi $\underline{u}_1 = (-2, 1, 0)$, $\underline{u}_2 = (2/5, 4/5, 2)$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale metrico $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z). Un vettore $\underline{v}$ verrà denotato tramite le sue coordinate. Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2)\,.$$

Soluzione. Basta applicare meccanicamente il procedimento: prima troviamo una base ortogonale, poi la normalizziamo moltiplicando ogni vettore per l'inverso della sua lunghezza.

Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\underline{u}_1 = \underline{w}_1 = (1, 1, 0)$$
$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{\langle \underline{w}_2, \underline{u}_1 \rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle} \underline{u}_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Infine $\underline{u}_3 = \underline{w}_3$ dato che $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_1 \rangle = 0$ e $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_2 \rangle = 0$. La base cercata è quindi:

$$\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\,, \quad (0, 0, 1) \right\}$$