Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa dell' 1/12/23

Esercizio 1. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. *Determinare gli autovalori di* L_A.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

1.4. *Verificare che esiste una base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita da autovettori per* L_A*. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

1.5. *Scrivere la matrice associata a* L_A *nella base di cui in 1.4.* (Utilizzate la definizione di matrice associata ad L_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $L_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)

1.6 *Determinare una matrice invertibile* M *tale che* $M^{-1} A M$ *sia diagonale.*

1.7 *La matrice di cui in 1.6 è unica ?.*

Esercizio 2. *Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito dalla matrice*

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. *Consideriamo l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *definita dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} i & 2 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}.$$

3.1. *Verificare che* L_A *ha un unico autovalore e determinarne la molteplicità algebrica.*

3.2. *Determinare equazioni cartesiane per l' autospazio associato a tale autovalore; determinare la molteplicità geometrica di tale autovalore.*

3.3. *Stabilire se* L_A *è diagonalizzabile.*

Esercizio 4. *Sia*

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Stabilire se L_A *è diagonalizzabile.*