

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.

Geometria. Canale 3.

Compito a casa dell' 1/12/23. Soluzioni.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. Determinare gli autovalori di L_A .

Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di L_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{L_A}(\lambda)$. La matrice associata a L_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{L_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda)$. Ne segue che L_A ha autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$.

1.2. Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.

Soluzione 1.2. Vi ricordo che l'autospazio V_λ associato ad un autovalore λ è dato da

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3; L_A \underline{x} = \lambda \underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3; A \underline{x} = \lambda \underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3; (A - \lambda I_3) \underline{x} = \underline{0}\}.$$

Quindi $V_0 = \{\underline{x}; A \underline{x} = \underline{0}\} = \text{Ker} L_A$; questo sottospazio sappiamo già calcolarlo ed otteniamo

$$V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Passiamo a V_2 ; la matrice $A - 2I_3$ è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \}$$

Procedendo analogamente si trova:

$$V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$$

1.3. Per ogni autospazio determinare una base.

Soluzione 1.3. In questo caso ogni autospazio è una retta (ognuno dei 3 sistemi è un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite e di rango 2). Risolvendo i sistemi si trova

$$V_0 = \mathbb{R}(0, -3, 1), \quad V_2 = \mathbb{R}(4, 9, 3), \quad V_4 = \mathbb{R}(0, 1, 1).$$

1.4. Verificare che esiste una base di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori per L_A . Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?

Soluzione 1.4. I vettori generatori dei 3 autospazi sono linearmente indipendenti perché abbiamo visto che *autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti*. Nel nostro caso gli autovalori sono distinti e possiamo concludere. Quindi una base di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di L_A è

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1), \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3), \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Questa base **non** è ovviamente unica; possiamo scegliere 3 generatori diversi nelle 3 rette di autovettori V_0, V_2, V_4 e ottenere così una diversa base di autovettori. Ad esempio

$$\underline{w}_1 = (0, 6, -2), \quad \underline{w}_2 = (4\pi, 9\pi, 3\pi), \quad \underline{w}_3 = (0, \sqrt{39}, \sqrt{39}).$$

1.5. Scrivere la matrice associata a L_A nella base di cui in 1.4. (Utilizzate la definizione di matrice associata ad L_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j -ma colonna le coordinate di $L_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad L_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di L_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso, per la base

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1) \in V_0, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3) \in V_2, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1) \in V_4$$

otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Denotiamo con \mathcal{B} questa base di autovettori, quindi

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 = (0, -3, 1), \underline{v}_2 = (4, 9, 3), \underline{v}_3 = (0, 1, 1)\}$$

1.6 Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1} A M$ sia diagonale.

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di \mathbb{R}^3 ; la base canonica e la base di autovettori $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 = (0, -3, 1), \underline{v}_2 = (4, 9, 3), \underline{v}_3 = (0, 1, 1)\}$. Sia M la matrice che ha come j -ma colonna le coordinate di \underline{v}_j nella base canonica: questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica \mathcal{E} alla base di autovettori \mathcal{B} , denotata $M_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}(\text{Id})$.

$$M_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}(\text{Id}) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sappiamo che la matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(L_A)$ associata a L_A nella nuova base è data da

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(L_A) &= M_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(\text{Id}) \cdot M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}(\text{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}(\text{Id}))^{-1} \cdot A \cdot M_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}(\text{Id}) \end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo già calcolato la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

In definitiva, la matrice $M := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\text{Id})$ è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

come si voleva.

1.7 *La matrice di cui in 1.6 è unica ?*

Soluzione 1.7. La matrice M è uguale a $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\text{Id})$ e dipende quindi dalla base di autovettori che abbiamo fissato; scegliendo una base diversa di autovettori cambiamo M ma è ancora vero, applicando il ragionamento fatto sopra, che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Quindi M **non** è unica.