Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 29/11/23

Esercizio 1. Consideriamo $V = \mathbb{R}_2[t]$ e l'applicazione $T : V \to V$ che associa ad un polinomio la sua derivata: $T(p) := p'$. Sappiamo che T è lineare. Determinare la matrice associata a T nella base canonica di V: $\mathcal{E} := \{1, t, t^2\}$.
Calcolare $\det T$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r := \text{Span}(1, 2, 1)$ (scriveremo brevemente $\mathbb{R}(1, 2, 1)$ per questa retta).
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[1] Una volta scritta la matrice associata a P in questa "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando la formula magica.

Esercizio 3. Utilizzando un opportuno sviluppo di Laplace, calcolare

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

Esercizio 4. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Dimostrare che

$$\det A = \det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Esercizio 5. Calcolare l'inversa della matrice dell'esempio 7.7 del libro di testo utilizzando il contenuto dell'esercizio 9.18 (matrice cofattore...).

[1] Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P sui vettori del piano π e sui vettori della retta r.