Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 24/11/23

Esercizio 1 . Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1, 2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1, 1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base, $\mathcal{U}$, di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1, 1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1, 0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

1.1 (Immediato dalla definizione.) Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
Come si scrive questa matrice nelle notazioni magiche ?

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di base ed utilizzando eventualmente le nostre *magiche notazioni*, risolvere i seguenti esercizi:

1.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

1.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

1.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Esercizio 2. Consideriamo $d : M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da

$$d\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Verificare che questa funzione soddisfa le proprietà (A) (B) (C) (D) pagina 163, e quindi, a norma del Corollario 9.4, essa è l' **unica** funzione che verifica queste 4 proprietà. Essa prende il nome di *funzione determinante per le matrici* 2×2.

Esercizio 3. Consideriamo una funzione $d : M_{33}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ verificante le proprietà (A) (B) (C) (D) pagina 163. Procedendo come nell'esempio 9.1 pagina 165 verificare che allora si deve avere, necessariamente,

$$d\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Verificare poi che, viceversa, definendo $d : M_{33}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ attraverso questa formula otteniamo effettivamente una funzione verificante le proprietà (A) (B) (C) (D) pagina 163. Quindi, a norma del Corollario 9.4, tale funzione è l' **unica** funzione $d : M_{33}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che verifica queste 4 proprietà. Essa prende il nome di *funzione determinante per le matrici* 3×3.

Esercizio 4 . Sia $d : M_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione verificante le proprietà (A), (B), (C), (D) pagina 163. Sia S una matrice triangolare superiore. Se S ha rango $< n$ allora S ha una riga nulla e quindi $d(S) = 0$ per la Proposizione 9.1. Supponiamo ora che $\mathrm{rg}(S) = n$ e siano $p_1, \dots, p_n$ i pivots (non nulli) di S. Utilizzare Gauss a salire per dimostrare nuovamente [1] che

$$d(S) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

[1]si veda l'Esempio 9.3 nel libro