Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 24/11/23. Soluzione dell'es. 1

Esercizio 1 . Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1, 2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1, 1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base, $\mathcal{U}$, di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1, 1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1, 0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

1.1 (Immediato dalla definizione.) Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
Come si scrive questa matrice nelle notazioni magiche ?

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di base ed utilizzando eventualmente le nostre *magiche notazioni*, risolvere i seguenti esercizi:
1.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
1.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
1.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Soluzione esercizio 1. Il testo dell'esercizio fornisce l'informazione

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \qquad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2\,;$$

questo vuol dire che il testo dell'esercizio fornisce la matrice richiesta in **1.1**, e cioè la matrice associata a T con la scelta di basi:

$$\text{base partenza} = \mathcal{V} \equiv \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,, \quad \text{base arrivo} = \mathcal{U} \equiv \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}.$$

Questa è la matrice

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$$

nella notazione magica. Infatti, per definizione, $M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T\underline{v}_j$ rispetto alla base $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. Quindi direttamente dal testo dell'esercizio si ha

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\,.$$

Si tratta ora di utilizzare la formula magica vista a lezione per la matrice associata ad una composizione di due o anche tre applicazioni lineari per trovare le matrici richieste in **1.2, 1.3, 1.4.**

Cominciamo con **1.2**. Il testo dell'esercizio ci chiede la matrice associata a T con la scelta di basi $\mathcal{V}$ in partenza e ancora $\mathcal{V}$ in arrivo. Dobbiamo quindi determinare $M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T)$. In **1.1** abbiamo determinato $M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$ e ovviamente abbiamo interesse ad utilizzare questa informazione.

La formula magica ci dice che

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T) \equiv M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\mathrm{Id} \circ T) = M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T)$$

Notare come la notazione suggerisca la soluzione.
$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$ è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Impostando il sistemino $(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + (-\frac{1}{3})(-1,1)$$

Analogamente

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + (-\frac{2}{3})(-1,1)$$

Ne segue [1] che

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = \left| \begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{matrix} \right|$$

e quindi in definitiva

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T) = \left| \begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -7/3 \end{matrix} \right|$$

Passiamo a **1.3.** Viene chiesta la matrice associata a T con la seguente scelta di basi: base partenza $\mathcal{U}$; base arrivo $\mathcal{V}$. Questa è la matrice

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T)$$

Conviene determinare questa matrice utilizzando la matrice in **1.2.** Dalla formula magica abbiamo

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T) = M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(T) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$$

(Notare ancora una volta come la notazione suggerisca la soluzione.) Ora, queste due matrici nel membro a destra già le conosciamo, e quindi a questo punto basta fare il prodotto per ottenere $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T)$.

Consideriamo infine **1.4.** Vogliamo determinare $M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T)$. In questo caso conviene determinare la matrice utilizzando **1.1** oppure **1.3**. Facciamolo prima con **1.1**. Si ha

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T) = M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(T) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}).$$

e conosciamo entrambe le matrici a destra. La soluzione dell'esercizio è quindi completa (lascio a voi i conti).
Vediamo infine come ottenere $M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T)$ utilizzando $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T)$ e cioè **1.3**. La formula magica ci dice che

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(T) = M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(T).$$

Il secondo fattore a destra è la matrice determinata in **1.3**. Il primo fattore a destra non lo conosciamo ma è la matrice inversa di $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$ che invece conosciamo. Possiamo calcolare l'inversa $(M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}))^{-1}$ e finire la soluzione dell'esercizio.

Osservazione. Abbiamo determinato $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$ impostando due sistemi non omogenei in (α, β) e (γ, δ) e risolvendo. Avremmo potuto procedere diversamente. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Il testo del problema ci fornisce

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{Id})$$

[1] leggete anche l'osservazione alla fine della soluzione di questo esercizio per questa matrice $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$

Infatti, dal testo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma allora, dalla formula magica,

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = M_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$$

che riscriviamo come

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$$

Quindi

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id}) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Calcolando l'inversa e facendo il prodotto riotteniamo $M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{Id})$.