

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 17/11/23 (versione del 21/11/23)

Esercizio 1. Verificare che la matrice

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile. Calcolarne l'inversa.

Sia $L = L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A . Spiegare perché L_A è invertibile; calcolare l'inversa di L_A .

Calcolare l'immagine tramite l'applicazione inversa del vettore $(3, -1, 2)$. Risolvere il sistema

$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{e_1 := (1, 0), e_2 := (0, 1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio \underline{x} . Consideriamo una seconda base di \mathbb{R}^2 data da

$$\underline{v}_1 = (1, 1), \quad \underline{v}_2 = (1, -1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.

Determinare le formule di cambiamento di coordinate

$$\underline{x} = B\underline{y}, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

Che relazione c'è fra B e C ?

★ *Come scriviamo B e C con le notazioni magiche ?*

Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2) .

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo l'applicazione lineare definita da

$$F(1, 1, 0) = (1, 2, -1), \quad F(0, 1, 1) = (-1, 1, 1), \quad F(0, 0, 1) = (-1, 0, 1).$$

Notare che i tre vettori $\{e'_1 := (1, 1, 0); e'_2 := (0, 1, 1); e'_3 := (0, 0, 1)\}$ sono una base \mathcal{E}' di \mathbb{R}^3 e quindi l'applicazione F è ben definita.

Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{e_1 := (1, 0, 0), e_2 := (0, 1, 0), e_3 := (0, 0, 1)\}$$

in \mathbb{R}^3 .

Determinare la matrice associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}', \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Utilizzando la linearità di F , determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

★ *Studiare iniettività e suriettività di F . (Abbiamo già risolto questo esercizio....)*

Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 con base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ fissata. Consideriamo $\{g_1 = (2, 0, 1), g_2 = (1, 3, 0), g_3 = (0, 1, 2)\}$. È subito visto che questi

3 vettori costituiscono una base di \mathbb{R}^3 . Sia P l'applicazione lineare $P : V \rightarrow V$ univocamente determinata da

$$(1) \quad P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3, \quad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3, \quad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3,$$

Utilizzando la linearità di P determinare la matrice A associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$).

★ *Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?*

★ **Esercizio 5.** *Ritornate all'esercizio 3: scrivete la matrice A' associata ad F con scelta di base $\mathcal{E}' := \{\underline{e}'_1 := (1, 1, 0); \underline{e}'_2 = (0, 1, 1); \underline{e}'_3 = (0, 0, 1)\}$ in partenza e base canonica \mathcal{E} in arrivo (è immediato trovare la matrice A').*

Ritrovate la soluzione dell'esercizio 3 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.

★ **Esercizio 6.** *Ritornate all'esercizio 4: scrivete la matrice A' associata a P con scelta di base canonica \mathcal{E} in partenza e base \mathcal{G} in arrivo (è immediato trovare la matrice A').*

Ritrovate la soluzione dell'esercizio 4 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.