Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 17/11/23 (versione del 21/11/23). Soluzioni.

Esercizio 1. Verificare che la matrice

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile. Calcolarne l'inversa.
Sia $L = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A. Spiegare perché L_A è invertibile; calcolare l'inversa di L_A.
Calcolare l'immagine tramite l'applicazione inversa del vettore $(3, -1, 2)$. Risolvere il sistema

$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione esercizio 1. Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se è non-singolare, cioè se e solo se il rango è uguale a n. Utilizzando la riduzione di Gauss si verifica facilmente che per la nostra matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ si ha $\mathrm{rg}(A) = 3$. La matrice data è quindi invertibile. Per determinare l'inversa scriviamo

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e applichiamo Gauss a scendere, Gauss a salire e la divisione per i pivots. Otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

Ne segue che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

L'inversa di L_A è data da $L_{A^{-1}}$. L'immagine di $(3, -1, 2)$ tramite $L_{A^{-1}}$ è data dal prodotto

$$A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Questa è anche la soluzione del sistema

$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Infatti: sappiamo che il sistema $A\underline{x} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}^T$ ammette un'unica soluzione $\underline{x}_0$ (perché la matrice ha rango 3); per determinarla partiamo dalla relazione

$$A\underline{x}_0 = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix};$$

moltiplicando a sinistra ambo i membri per A^{-1} otteniamo

$$A^{-1} \cdot (A\underline{x}_0) = A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

ed utilizzando l'associatività ed il fatto che $A^{-1} \cdot A = I_3$ otteniamo finalmente

$$\underline{x}_0 = A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1 := (1,0), \underline{e}_2 := (0,1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{v}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{v}_2 = (1,-1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.
Determinare le formule di cambiamento di coordinate

$$\underline{x} = B\underline{y}\,, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

Che relazione c'è fra B e C ?
$\star$ *Come scriviamo B e C con le notazioni magiche ?*
Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2).

Soluzione esercizio 2. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. La matrice B del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è *la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del j-mo vettore della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$*. Nel nostro caso

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2\,, \quad \underline{v}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue, per quanto visto a lezione che

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

da cui segue anche

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

(e quindi $C = B^{-1}$.) Calcoliamo l'inversa dell matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right| \to$$

$$\to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right|$$

Abbiamo cioè

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Nelle notazioni magiche abbiamo

$$B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) , \quad C = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}))^{-1} .$$

Sia infine U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Sostituendo, vediamo che il sottospazio U ha equazione $(y_1 + y_2) - 2(y_1 - y_2) = 0$ e cioè $-y_1 + 3y_2 = 0$ nelle coordinate (y_1, y_2).

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1) , \quad F(0,1,1) = (-1,1,1) , \quad F(0,0,1) = (-1,0,1).$$

Notare che i tre vettori $\{\underline{e}'_1 := (1,1,0); \underline{e}'_2 = (0,1,1); \underline{e}'_3 = (0,0,1)\}$ sono una base $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^3$ e quindi l'applicazione F è ben definita.
Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}' , \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Utilizzando la linearità di F, determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E} , \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

$\star$ *Studiare iniettività e suriettività di F. (Abbiamo già risolto questo esercizio....)*
Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?

Soluzione esercizio 3. La matrice associata ad F con questa scelta di basi,

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E} , \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E} ,$$

è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F(\underline{e}_j)$ nella base canonica $\mathcal{E}$. Per determinare $F(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,1)$ possiamo esprimere i vettori $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e applicare la linearità. Si ha

$$(1) \qquad (1,0,0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3 , \quad (0,1,0) = \underline{v}_2 - \underline{v}_3 , \quad (0,0,1) = \underline{v}_3 .$$

Ne segue che, per linearità,

$$F(1,0,0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) + F(\underline{v}_3) = (1,2,-1) - (-1,1,1) + (-1,0,1)$$

e quindi

$$F(1,0,0) = (1,1,-1) .$$

Analogamente,

$$F(0,1,0) = F(\underline{v}_2 - \underline{v}_3) = F(\underline{v}_2) - F(\underline{v}_3) = (-1,1,1) - (-1,0,1) = (0,1,0)$$

$$F(0,0,1) = F(\underline{v}_3) = (-1,0,1)$$

Quindi la matrice cercata è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Questa è la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)$ nelle notazioni magiche.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Consideriamo $\{\underline{g}_1 = (2,0,1) , \underline{g}_2 = (1,3,0) , \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi

3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ univocamente determinata da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{2}$$

Utilizzando la linearità di P determinare la matrice A associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\,\underline{g}_3\}$).
⋆ *Come si scrive la matrice A nelle notazioni magiche ?*

Soluzione esercizio 4. La matrice associata a P rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\,\underline{g}_3\}$ ha come colonne le coordinate di $P(\underline{g}_1), P(\underline{g}_2)$ e $P(\underline{g}_3)$ rispetto alla base $\mathcal{G}$. Utilizziamo la linearità, come suggerito, e calcoliamo

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_1) &= P(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 2P(\underline{e}_1) + P(\underline{e}_3) = 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + (\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 5\underline{g}_1 + \underline{g}_2 - 3\underline{g}_3 \\ P(\underline{g}_2) &= P(\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = P(\underline{e}_1) + 3P(\underline{e}_2) = (2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + 3(\underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + \underline{g}_3 \\ P(\underline{g}_3) &= P(\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = P(\underline{e}_2) + 2P(\underline{e}_3) = (\underline{g}_2 + \underline{g}_3) + 2(\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta P nella base $\mathcal{G}$ è pertanto

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Nella notazione magica questa è la matrice $M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P)$

⋆ **Esercizio 5.** *Ritornate all'esercizio 3: scrivete la matrice A' associata ad F con scelta di base $\mathcal{E}' := \{\underline{e}'_1 := (1,1,0); \underline{e}'_2 = (0,1,1); \underline{e}'_3 = (0,0,1)\}$ in partenza e base canonica $\mathcal{E}$ in arrivo (è immediato trovare la matrice A'....).*
Ritrovate la soluzione dell'esercizio 3 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.

Soluzione esercizio 5. Faremo uso della formula magica. Consideriamo la base

$$\mathcal{B} := \{\underline{v} = (1,1,0) \quad \underline{v}_2 = (0,1,1)\,, \quad \underline{v}_3 = (0,0,1)\}$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice A' associata ad F rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \mathcal{B}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica} \equiv \mathcal{E}\,.$$

Nella notazione magica questa è la matrice

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(F)\,.$$

Tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\underline{v}_j)$; ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A' \equiv M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Vogliamo ora determinare la matrice A associata ad F rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E} = \text{base canonica}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E} = \text{base canonica}\,.$$

Quindi

$$A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)\,.$$

Dalla formula magica abbiamo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(F) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})\,.$$

Abbiamo già determinato $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ nella soluzione dell'esercizio 3, si veda la formula (1), dove abbiamo visto che

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Possiamo ora fare il prodotto e riottenere la soluzione dell'esercizio 3 (si veda più avanti, alla fine della soluzione).
Senza conoscere $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ potremmo procedere come segue.
La matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$ è l'inversa della matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$, e cioè della matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ nella base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Quest'ultima matrice è ben nota perché è data nel testo del problema

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1}$$

da cui, calcolando l'inversa,

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Concludendo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\star$ **Esercizio 6.** *Ritornate all'esercizio 4: scrivete la matrice A' associata a P con scelta di base canonica $\mathcal{E}$ in partenza e base $\mathcal{G}$ in arrivo (è immediato trovare la matrice A'....).*
Ritrovate la soluzione dell'esercizio 4 utilizzando questa matrice A' ed una opportuna matrice di cambiamento di base.

Soluzione esercizio 6. La matrice $A' = M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(P)$ che rappresenta l'applicazione lineare P rispetto alla base canonica come base di partenza e alla base $\mathcal{G}$ come base di arrivo è la matrice data nel testo dell'esercizio:

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice richiesta dall'esercizio è la matrice $A = M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P)$ associata alla scelta $\mathcal{G}$ in partenza e in arrivo. Per la formula magica

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P) = M_{\mathcal{G},\mathcal{E}}(P) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$$

La matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$ è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base $\mathcal{G}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dai dati dell'esercizio abbiamo pertanto

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così nuovamente,

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$