Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa dell' 11/11/23

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare *iniettiva.* Verificare che F trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. Dedurne che F trasforma sottospazi di dimensione k di V in sottospazi di dimensione k di W.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito come l'insieme degli $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

2.1 Determinare la dimensione di U. Determinare una base di U. Determinare equazioni cartesiane per U.
2.2 Determinare $\ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e un'applicazione lineare *iniettiva* $T : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^5$ che abbia come immagine U (vi ricordo che un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base del dominio). Determinare equazioni parametriche per U.
2.3 Determinare l'espressione in coordinate di T e cioè una matrice C tale che $T = L_C$ (è facile determinare le colonne di C).

Esercizio 3. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ definito da

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \right)$$

Esercizio 4. Determinare una base per $U \cap W$, con U il sottospazio dell'esercizio 2 e W il sottospazio dell'esercizio 3.

Esercizio 5. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine L di $\mathbb{R}^3$ con giacitura il sottospazio $W = \mathrm{Span}(1, -1, 2)$ e contenente il vettore $\underline{v}_0 := (0, 1, 0)$, $L := \underline{v}_0 + W$.

Esercizio 6. Sia $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Quindi $Q = L_A$.
(6.0) Scrivere l'espressione di Q in coordinate,

$$Q\underline{x} = \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

(6.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per $\mathrm{Ker}(Q)$ e $\mathrm{Im}\, Q$. Studiare l'iniettività/suriettività di Q. Determinare la controimmagine del vettore $(2, -1, 5)$[1]
(6.2) Determinare l'immagine tramite Q della retta[2] di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(6.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano π di equazione $x_1 - x_3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\pi)$?
(6.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano σ di equazione $5x_1 - 3x_2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\sigma)$?
Confrontare le dimensioni di $Q(\pi)$ e $Q(\sigma)$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?
Cercate di spiegare cosa succede.

[1] Vi ricordo che se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora la controimmagine di $b \in B$ tramite f è il sottoinsieme di A definito da $\{a \in A \,|\, f(a) = b\}$. Analogamente si definisce la controimmagine di un sottoinsieme di B. La controimmagine di b tramite f viene denotata con $f^{-1}(b)$.

[2] Se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora l'immagine di un sottoinsieme A' di A mediante f è il sottoinsieme di B definito da $f(A') = \{f(a) |\, a \in A'\}$.