Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa dell 11/11/23. Soluzioni.

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare *iniettiva*. Verificare che F trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. Dedurne che F trasforma sottospazi di dimensione k di V in sottospazi di dimensione k di W.

Soluzione. Sia $F : V \to W$ iniettiva. Siano $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti di V. Dobbiamo verificare che $\{F(\underline{v}_1), \ldots, F(\underline{v}_k)\}$ sono vettori linearmente indipendenti di W. Per linearità di F si ha

$$\alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_k F(\underline{v}_k) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k) = 0$$

ovvero se e solo se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k \in \ker F$. Ma F è iniettiva per ipotesi, dunque $\ker F = \{0\}$; ne segue $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = 0$. Ma i vettori $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, dunque deve essere $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ come volevamo dimostrare.

Sia ora V_0 un sottospazio di dimensione k di V e sia $W_0 := F(V_0)$ la sua immagine in W. Essendo immagine di un sottospazio mediante un'applicazione *lineare*, W_0 è un sottospazio di W. Dobbiamo solo dimostrare che W_0 ha dimensione k. Poiché V_0 ha dimensione k, esisterà una base $\{\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_k\}$ di V_0. Questi vettori sono indipendenti in V e dunque, per la prima parte dell'esercizio, i vettori $F(\underline{v}_1), \ldots, F(\underline{v}_k)$ sono indipendenti in W. Inoltre $F(\underline{v}_i) \in F(V_0) =: W_0$, dunque i vettori $F(\underline{v}_1), \ldots, F(\underline{v}_k)$ sono vettori indipendenti di W_0. Essi sono anche un sistema di generatori per W_0. Infatti se $\underline{w} \in W_0$ allora $\underline{w} = F(\underline{v})$ per qualche $\underline{v} \in V_0$. Poiché $\{\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_k\}$ è una base di V_0, esistono scalari α_i tali che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots \alpha_k \underline{v}_k$. Ne segue

$$\underline{w} = F(\underline{v}) = \alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots \alpha_k F(\underline{v}_k)$$

Abbiamo così dimostrato che $\{F(\underline{v}_1), \ldots, F(\underline{v}_k)\}$ è un sistema di generatori indipendenti per W_0, ovvero è una base di W_0; essendo costituita da k elementi, si ha $\dim W_0 = k$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito come l'insieme degli $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

2.1 Determinare la dimensione di U. Determinare una base di U. Determinare equazioni cartesiane per U.
2.2 Determinare $\ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e un'applicazione lineare *iniettiva* $T : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^5$ che abbia come immagine U (vi ricordo che un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base del dominio). Determinare equazioni parametriche per U.
2.3 Determinare l'espressione in coordinate di T e cioè una matrice C tale che $T = L_C$ (è facile determinare le colonne di C).

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Operando con Gauss [1] otteniamo la matrice a scala:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha due pivot:
$p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$
$p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 3$.
S, e quindi A, ha rango 2; ne segue che la dimensione di U, che è per definizione la dimensione di Ker$A$, è uguale a $5 - 2 = 3$.
Per rispondere al secondo quesito risolviamo il sistema, trovando quindi una base di $U (= \mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}S)$. Le variabili dipendenti nel sistema a scala sono x_1 e x_3; quelle libere x_2, x_4, x_5. Esplicitando rispetto alle variabili dipendenti otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + x_5 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

e quindi, ragionando come al solito,

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

I tre vettori trovati sono necessariamente linearmente indipendenti e sono quindi una base di U. Torniamo alla domanda **2.2**: basterà scegliere $\ell = 3$ e l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ definita univocamente dalla legge

$$\underline{e}_1 \to \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{e}_2 \to \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{e}_3 \to \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Questa è l'applicazione L_C con $C \in M_{5,3}(\mathbb{R})$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dato che $\dim \mathrm{Ker}L_C = 3 - \mathrm{rg}C = 3 - 3 = 0$, ne segue che L_C è iniettiva. L'applicazione L_C fornisce quindi una parametrizzazione di U.

Per scrivere equazioni parametriche di U basterà considerare la base di U trovata sopra: $\underline{x} \in U$ se e solo se $\underline{x}$ è combinazione lineare di quei tre vettori. Otteniamo

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = s + t + u \\ x_2 = s \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \\ x_5 = u \end{cases}$$

[1](Terza riga $\longrightarrow$ Terza riga - Prima riga); poi (Terza riga $\longrightarrow$ Terza riga - Seconda riga)

e al variare di $s, t, u \in \mathbb{R}$ otteniamo tutti i vettori di U. Le (1) sono quindi le equazioni parametriche di U.

Esercizio 3. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ definito da

$$W = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \right)$$

Soluzione. Procediamo come spiegato nel libro di testo , Esempio 6.11. Quindi $\underline{x} \in W$ se e solo se il sistema $A\underline{v} = \underline{x}$ ha soluzione, con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Riducendo a scala

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ -1 & -1 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 \end{array} \right|$$

otteniamo

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & x_4 + x_1 \\ 0 & 0 & x_5 + x_2 \end{array} \right|$$

Imponendo la compatibilità otteniamo le equazioni cartesiane di W che sono

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare una base per $U \cap W$, con U il sottospazio dell'esercizio 2 e W il sottospazio dell'esercizio 3.

Soluzione. Abbiamo equazioni cartesiane per U e W; è ovvio che $U \cap W$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema ottenuto considerando le equazioni di U **e** le equazioni di W. Conviene chiaramente esprimere U tramite le sue equazioni ridotte. Queste sono le equazioni $S\underline{x} = \underline{0}$ con S la ridotta di A. [2] Quindi, in

[2]In alternativa, basta prendere le prime due equazioni del sistema 3×5 che definiva U; spieghiamo meglio questo punto.
Sappiamo che la matrice che definisce U, la matrice A, ha rango 2; quindi il massimo numero di righe linearmente indipendenti è due; dato che le prime due righe sono non-proporzionali ne deduciamo che la terza riga è combinazione lineare delle prime due; dal Lemma fondamentale sappiamo allora che il sistema 3×5 che definisce U è equivalente al sistema 2×5 dato dalle prime due equazioni.

definitiva, per l'intersezione otteniamo il sistema 5×5 con le prime due equazioni date da $S\underline{x} = \underline{0}$ e le altre tre date dall'esercizio 2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Basterà allora ridurre con Gauss e risolvere come al solito, determinando una base per l'insieme dele soluzioni.

Esercizio 5. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine L di $\mathbb{R}^3$ con giacitura il sottospazio $W = \mathrm{Span}(1, -1, 2)$ e contenente il vettore $\underline{v}_0 := (0, 1, 0)$, $L := \underline{v}_0 + W$.

Soluzione.
Determiniamo prima le equazioni cartesiane del sottospazio W. Procedendo come nell'esempio 6.11 del libro di testo scriviamo

$$\left| \begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ -1 & x_2 \\ 2 & x_3 \end{array} \right|$$

e riducendo con Gauss otteniamo

$$\left| \begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & -2x_1 + x_3 \end{array} \right|$$

Quindi, imponendo compatibilità,

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Equivalentemente

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid B \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \} \text{ con } B = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Per la Proposizione (6.4) otteniamo che L ha equazioni cartesiane

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid B \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right| = B \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \}.$$

In definitiva

$$L = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid B \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \}.$$

Esercizio 6. Sia $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{array} \right|.$$

Quindi $Q = L_A$.

(6.0) Scrivere l'espressione di Q in coordinate,

$$Q\underline{x} = \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$$

(6.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per $\mathrm{Ker}(Q)$ e $\mathrm{Im}\,Q$. Studiare l'iniettività/suriettività di Q. Determinare la controimmagine del vettore $(2, -1, 5)$[3]
(6.2) Determinare l'immagine tramite Q della retta[4] di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(6.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano π di equazione $x_1 - x_3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\pi)$?
(6.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano σ di equazione $5x_1 - 3x_2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\sigma)$?
Confrontare le dimensioni di $Q(\pi)$ e $Q(\sigma)$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?
Cercate di spiegare cosa succede.

Soluzione.
6.0 L'espressione di Q in coordinate è

$$Q(\underline{x}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}.$$

6.1 Si ha

$$\mathrm{Ker}Q = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \} \tag{2}$$

e si tratta come al solito di risolvere il sistema e trovare una base per lo spazio delle soluzioni. Si trova un nucleo di dimensione 1 generato dal vettore $(3, 5, 2)$. Lo spazio immagine ha dimensione 2, generato ad esempio dalle prime 2 colonne di A che sono chiaramente non-proporzionali. L'applicazione lineare Q non è iniettiva, dato che il nucleo è non banale; Q non è suriettiva, dato che l'immagine ha dimensione 2. Equazioni parametriche di $\mathrm{Ker}Q$ sono

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = 2t \end{cases}$$

equazioni parametriche per l'immagine sono

$$\begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = 2s \\ x_3 = -2t \end{cases}$$

[3]Vi ricordo che se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora la controimmagine di $b \in B$ tramite f è il sottoinsieme di A definito da $\{a \in A \,|\, f(a) = b\}$. Analogamente si definisce la controimmagine di un sottoinsieme di B. La controimmagine di b tramite f viene denotata con $f^{-1}(b)$.

[4]Se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora l'immagine di un sottoinsieme A' di A mediante f è il sottoinsieme di B definito da $f(A') = \{f(a) |\, a \in A'\}$.

Equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} Q$ si ottengono dalla base di $\operatorname{Im} Q$, procedendo come negli esercizi precedenti. Equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} Q$ sono date, ad esempio dalle prime due equazioni di (2) che sono 2=3-1 equazioni linearmente indipendenti, come deve essere.
Per determinare la controimmagine di $(2, -1, 5)$ tramite Q basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = -1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

6.2 Risolvendo il sistema scopriamo che la retta è generata dal vettore $(1, -2, 1)$. Questo vettore viene trasformato da Q in $(4, -1, 1)$. L'immagine della retta è quindi il sottospazio generato da $(4, -1, 1)$ [5].
6.3 $Q(\pi)$ si ottiene fissando una base di π e trasformandola con Q. Vediamo i dettagli; un base di π è data da $\{\underline{v}_1 = (1, 0, 1), \underline{v}_2 = (0, 1, 0)\}$. Si ha allora:
$Q(\pi) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in \pi\} = \{Q(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} =$
$\{\alpha_1 Q(\underline{v}_1) + \alpha_2 Q(\underline{v}_2), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(Q\underline{v}_1, Q\underline{v}_2) = \operatorname{Span}((2, -1, 5), (-1, 0, 3))$
Conclusione: l'immagine tramite Q di π è un piano e più precisamente il piano $\operatorname{Span}((2, -1, 5), (-1, 0, 3))$.
6.4 Una base per σ è data da $\{\underline{w}_1 = (3, 5, 0), \underline{w}_2 = (0, 0, 1)\}$; procedendo come nel punto precedente troviamo che l'immagine di σ tramite Q è data da
$\operatorname{Span}(Q\underline{w}_1, Q\underline{w}_2) = \operatorname{Span}(Q(3, 5, 0), Q(0, 0, 1)) = \operatorname{Span}((-2, 6, -10), (1, -3, 5))$.
In questo caso l'immagine di σ ha dimensione 1 (infatti i due vettori nell'ultimo span sono proporzionali). Conclusione: $Q(\sigma)$ è la retta generata da $(1, -3, 5)$.
Le equazioni parametriche dell'immagine di σ tramite Q sono ottenute come negli esercizi precedenti.
Per spiegare come sia possibile che l'immagine di π abbia dimensione 2 mentre quella di σ abbia dimensione 1 osserviamo che σ contiene il nucleo di Q mentre π ha intersezione banale con tale nucleo.

[5] per capire questo punto ragioniamo come segue: sia r la retta; allora $Q(r) = \{Q(\underline{v}), \underline{v} \in r\} = \{Q(\alpha(1, -2, 1)), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha Q(1, -2, 1), \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(Q(1, -2, 1)) = \operatorname{Span}(4, -1, 1)$