Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 3/11/23

Esercizio 1. Si consideri il sistema *omogeneo* di 4 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Determinare una matrice A tale che $\Sigma_0 = \mathrm{Ker} A$.
Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema omogeneo *a scala*, $S\underline{x} = \underline{0}$, equivalente al sistema dato.
Determinare una base di Σ_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema non-omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite (ottenuto dal sistema omogeneo dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

2.0 Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema *a scala*, $S\underline{x} = \underline{c}$, equivalente al sistema dato.
2.1 Verificare che il sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$ è compatibile. (Otteniamo quindi la compatibiltà del sistema iniziale.)
2.2 Sia Σ l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale. Scrivere Σ nella forma

$$\Sigma = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell) + \underline{v}_0$$

per un opportuno $\ell \in \mathbb{N}$ e per opportuni vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_0$ in $\mathbb{R}^5$, con $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell\}$ linearmente indipendenti [1]; verificate in questo modo che vale il teorema di struttura.

Esercizio 3. Utilizzando quanto visto ultimamente a lezione, determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Esercizio 4. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare basi di U e di V. Determinare una base per $U + V$ (È ovvio che $U + V$ ha come insieme di generatori i vettori ottenuti prendendo l'unione di generatori di U ed di generatori di V.) Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Esercizio 5 Sia $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

[1] *Suggerimento*: utilizzate i passi della riduzione di Gauss che avete utilizzato per l'esercizio precedente ....

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata. Determinare una base per $\mathrm{Ker}(L_A)$ ed una base per $\mathrm{Im}(L_A)$. Studiare iniettività e suriettività di L_A. Dire se L_A è bigettiva.

Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi

Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ o più in generale di $\mathbb{K}^n$. Supponiamo che U abbia **dimensione** ℓ.
Diremo che sono date **equazioni cartesiane** per U se è data una matrice $A \in M_{(n-\ell)\times n}(\mathbb{K})$ **di rango uguale a** $n-\ell$ tale che $U = \{\underline{x} \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$; le equazioni cartesiane sono precisamente questo sistema di equazioni che hanno U come insieme soluzione. Non sono univocamente determinate. Notiamo che $(n-\ell)$ è il **numero minimo** di equazioni necessarie per descrivere U tramite un sistema in n incognite (ragionare con il teorema della dimensione).
Diremo che sono date **equazioni parametriche** per U se è data una base di U, $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell\}$, con la quale sia possibile esprimere ogni vettore di U come

$$t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell\underline{u}_\ell$$

per opportuni $t_1, \ldots, t_\ell \in \mathbb{K}$. Le equazioni parametriche di U sono allora

$$\underline{x} = t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell\underline{u}_\ell\,, \quad t_1, \ldots, t_\ell \in \mathbb{K}\,.$$

Osserviamo che i sottospazi sono spesso dati come soluzioni di un sistema (non necessariamente costituito da un numero minimo di equazioni) oppure tramite un sistema di generatori (non necessariamente una base). Per determinare equazioni cartesiane occorre nel primo caso ridurre il sistema a scala [2] oppure, nel secondo caso, estrarre una base dall'insieme dei generatori di U.

Si passa da equazioni cartesiane ed equazioni parametriche determinando una base per $\mathrm{Ker}A$.
Si passa da equazioni parametriche (e quindi il dato di una base per U) ad equazioni cartesiane nel modo spiegato a pagina 119 del libro, a partire dalla riga -8, con esempio chiarificatore a pagina 120 (Esempio 6.11).

Leggere le 8 ultime righe a pagina 119 e l'esempio 6.11.

Esercizio 6. Sia $U = \mathrm{Ker}A$ con A uguale alla matrice dell'esercizio 5. Determinare equazioni cartesiane per U.
Determinare equazioni parametriche per U.

Esercizio 7. Sia $U \leq \mathbb{R}^4$ come nell'esercizio 4,

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare equazioni cartesiane per U.

[2] ad esempio, ci sono altri metodi che vedremo più avanti nel corso