Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 3/11/23. SOLUZIONE degli ultimi due esercizi

Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi

Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ o più in generale di $\mathbb{K}^n$. Supponiamo che U abbia **dimensione** ℓ.
Diremo che sono date **equazioni cartesiane** per U se è data una matrice $A \in M_{(n-\ell)\times n}(\mathbb{K})$ **di rango uguale a** $n - \ell$ tale che $U = \{\underline{x} \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$; le equazioni cartesiane sono precisamente questo sistema di equazioni che hanno U come insieme soluzione. Non sono univocamente determinate. Notiamo che $(n - \ell)$ è il **numero minimo** di equazioni necessarie per descrivere U tramite un sistema in n incognite (ragionare con il teorema della dimensione).
Diremo che sono date **equazioni parametriche** per U se è data una base di U, $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell\}$, con la quale sia possibile esprimere ogni vettore di U come

$$t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell\underline{u}_\ell$$

per opportuni $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{K}$. Le equazioni parametriche di U sono allora

$$\underline{x} = t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell\underline{u}_\ell\,, \quad t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{K}\,.$$

Osserviamo che i sottospazi sono spesso dati come soluzioni di un sistema (non necessariamente costituito da un numero minimo di equazioni) oppure tramite un sistema di generatori (non necessariamente una base). Per determinare equazioni cartesiane occorre nel primo caso ridurre il sistema a scala [1] oppure, nel secondo caso, estrarre una base dall'insieme dei generatori di U.

Si passa da equazioni cartesiane ed equazioni parametriche determinando una base per Ker$A$.
Si passa da equazioni parametriche (e quindi il dato di una base per U) ad equazioni cartesiane nel modo spiegato a pagina 119 del libro, a partire dalla riga -8, con esempio chiarificatore a pagina 120 (Esempio 6.11).

Leggere le 8 ultime righe a pagina 119 e l'esempio 6.11.

Esercizio 6. Sia $U = \mathrm{Ker}A$ con A uguale alla matrice dell'esercizio 5. Determinare equazioni cartesiane per U.
Determinare equazioni parametriche per U.

Soluzione. Sappiamo dall'esercizio precedente, che U ha dimensione 2. Quindi cerchiamo una matrice $B \in M_{(4-2)\times 4}(\mathbb{R}) \equiv M_{2\times 4}(\mathbb{R})$, di rango 2, tale che $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, B\underline{x} = \underline{0}\}$. Ora, A ha rango 2; quindi 2 è il massimo numero di righe linearmente indipendenti. È anche ovvio che le prime due righe sono linearmente indipendenti, perché non-proporzionali. Ne segue che equazioni cartesiane per U sono date

$$B\underline{x} = \underline{0}\,, \quad \text{con} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

B è quindi costituita dalle prime 2 righe di A; quindi scartiamo da A le righe "in eccesso" e teniamo solo quelle linearmente indipendenti ed in numero massimo con

[1] ad esempio, ci sono altri metodi che vedremo più avanti nel corso

questa proprietà. Per le equazioni parametriche, dobbiamo determinare una base per $U \equiv \mathrm{Ker}A$. Questo lo abbiamo già fatto nell'esercizio 5 ed abbiamo scoperto che

$$U := \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

con lo span costituito da vettori linearmente indipendenti. Ne segue che equazioni parametriche per U sono date da

$$\underline{x} = t_1 \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + t_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 7. Sia $U \leq \mathbb{R}^4$ come nell'esercizio 4,

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare equazioni cartesiane per U.

Soluzione. Prima di tutto determiniamo una base per U; questo lo abbiamo già fatto

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Ora, si veda pagina 119 del libro di testo, consideriamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$$

riduciamo con Gauss ed imponiamo la compatibilità.
Otteniamo

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cartesiane di U. Scritto diversamente

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\} \quad \text{con} \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$