Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 24/10/23

Preambolo all'esercizio. Sia V uno spazio vettoriale, siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di V e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una decomposizione di V in somma diretta di W_1 e W_2. Definiamo qui sotto quattro applicazioni:
$P_{W_1}^{W_2}$, la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;
$P_{W_2}^{W_1}$, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1.
$S_{W_1}^{W_2}$, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;
$S_{W_2}^{W_1}$, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.
Per semplificare la notazione poniamo

$$P_1 := P_{W_1}^{W_2}\,, \quad P_2 := P_{W_2}^{W_1}\,, \quad S_1 := S_{W_1}^{W_2}\,, \quad S_2 := S_{W_2}^{W_1}$$

Vediamo la definizione: abbiamo visto in classe che ogni vettore $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo $P_1 : V \to V$ associando a $\underline{w} \in V$ il vettore $\underline{w}_1 \in W_1 \subset V$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Analogamente: $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$ per definizione. Riassumendo:

$$P_1(\underline{w}) := \underline{w}_1, \quad P_2(\underline{w}) := \underline{w}_2\,.$$

Infine

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2, \quad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

Esercizio.
1. Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 e ovviamente distinti. Su un disegno indicate un generico vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^2$, $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$, $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
2. Verificare che $P_1 : V \to V$ e $P_2 : V \to V$, $S_1 : V \to V$ e $S_2 : V \to V$ sono applicazioni **lineari**. Concentratevi preliminarmente su P_1 e P_2.
3. Verificare che, in generale, sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_1 + P_2 = \mathrm{Id} \tag{1}$$

dove due applicazioni $T : V \to V$, $T' : V \to V$ (anche non lineari) sono uguali se $T(\underline{v}) = T'(\underline{v})\,, \ \forall \underline{v} \in V$.
Verificare poi che

$$S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id} \tag{2}$$

$$(S_1)^2 = \mathrm{Id}\,; \quad (S_2)^2 = \mathrm{Id} \tag{3}$$

Nella (1) abbiamo adottato le seguenti notazioni:
per una qualsiasi applicazione lineare $T : V \to V$ abbiamo indicato con T^2 l'applicazione $T \circ T$ e per una coppia di applicazioni (anche non lineari) S e T abbiamo indicato con $S + T$ l'applicazione definita da $(S + T)(\underline{v}) := S(\underline{v}) + T(\underline{v})$. Infine, Id_V è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
4. Ritrovate queste identità sul vostro disegno applicando le varie applicazioni al vettore $\underline{w}$.