Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 24/10/23. Soluzione.

1. Vogliamo dimostrare che $P_1(\underline{w}+\underline{w}') = P_1(\underline{w}) + P_1(\underline{w}')$ e che $P_1(\lambda\underline{w}) = \lambda P_1(\underline{w})$. Vediamo la prima relazione: esistono unici $\underline{w}_1 \in W_1$, $\underline{w}_2 \in W_2$ tali che $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ e si ha, per definizione, $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$; analogamente esistono unici $\underline{w}_1' \in W_1$, $\underline{w}_2' \in W_2$ tali che $\underline{w}' = \underline{w}_1' + \underline{w}_2'$ e si ha, per definizione, $P_1(\underline{w}') = \underline{w}_1'$. Ne segue che

$$\underline{w} + \underline{w}' = (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + (\underline{w}_1' + \underline{w}_2') \equiv (\underline{w}_1 + \underline{w}_1') + (\underline{w}_2 + \underline{w}_2')$$

con il primo addendo dell'ultima espressione in W_1 ed il secondo addendo in W_2. Questa è **la** decomposizione di $\underline{w}+\underline{w}'$ Ne segue, per definizione, che $P_1(\underline{w}+\underline{w}') = (\underline{w}_1 + \underline{w}_1')$. Ma a destra riconosciamo $P_1(\underline{w}) + P_1(\underline{w}')$ e quindi

$$P_1(\underline{w}+\underline{w}') = P_1(\underline{w}) + P_1(\underline{w}')$$

come richiesto.
Analogamente si dimostra che $P_1(\alpha\underline{w}) = \alpha P_1(\underline{w})$: infatti

$$\alpha\underline{w} = \alpha(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \alpha\underline{w}_1 + \alpha\underline{w}_2.$$

A destra c'è **la** decomposizione di $\alpha\underline{w}$ secondo la decomposizione $V = W_1 \oplus W_2$. Per definizione $P_1(\alpha\underline{w}) = \alpha\underline{w}_1$; ma a destra di quest'ultima uguaglianza riconosciamo $\alpha P_1(\underline{w})$ e quindi

$$P_1(\alpha\underline{w}) = \alpha P_1(\underline{w}).$$

Ne segue che P_1 è lineare.

Passiamo alle simmetrie.
Vogliamo dimostrare che

$$S_1(\underline{w}+\underline{w}') = S_1(\underline{w}) + S_1(\underline{w}') \quad \text{e} \quad S_1(\lambda\underline{w}) = \lambda S_1(\underline{w}).$$

Vediamo ad esempio la prima relazione: esistono unici $\underline{w}_1 \in W_1$, $\underline{w}_2 \in W_2$ tali che $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ e si ha, per definizione, $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2$; analogamente esistono unici $\underline{w}_1' \in W_1$, $\underline{w}_2' \in W_2$ tali che $\underline{w}' = \underline{w}_1' + \underline{w}_2'$ e si ha, per definizione, $S_1(\underline{w}') = \underline{w}_1' - \underline{w}_2'$. Ne segue che

$$\underline{w} + \underline{w}' = (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + (\underline{w}_1' + \underline{w}_2') \equiv (\underline{w}_1 + \underline{w}_1') + (\underline{w}_2 + \underline{w}_2')$$

con il primo addendo dell'ultima espressione in W_1 ed il secondo addendo in W_2. Ne segue, per definizione, che

$$S_1(\underline{w}+\underline{w}') = (\underline{w}_1 + \underline{w}_1') - (\underline{w}_2 + \underline{w}_2') = (\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + (\underline{w}_1' - \underline{w}_2')$$

Ma a destra riconosciamo $S_1(\underline{w}) + S_1(\underline{w}')$ e quindi

$$S_1(\underline{w}+\underline{w}') = S_1(\underline{w}) + S_1(\underline{w}')$$

come richiesto. La linearità di S_2 è del tutto analoga.

3. Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Calcoliamo $(P_1)^2(\underline{w})$:

$$(P_1)^2(\underline{w}) = P_1(P_1(\underline{w})) = P_1(P_1(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = P_1(\underline{w}_1) = \underline{w}_1 = P_1(\underline{w}),$$

dove nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato la definizione di P_1 e nella quarta uguaglianza abbiamo ragionato come segue:
$\underline{w}_1 \in W_1$, la sua unica decomposizione è quindi data da $\underline{w}_1 = \underline{w}_1 + \underline{0}$ e dunque $P_1(\underline{w}_1) = \underline{w}_1$.

La seconda identità è analoga:

$$(P_2)^2(\underline{w}) = P_2(P_2(\underline{w})) = P_2(P_2(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = P_2(\underline{w}_2) = \underline{w}_2 = P_2(\underline{w}).$$

Dimostriamo infine che $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}$. Sia $\underline{w} \in V$ di decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Abbiamo:

$$(P_1+P_2)(\underline{w}) := P_1(\underline{w})+P_2(\underline{w}) = P_1(\underline{w}_1+\underline{w}_2)+P_2(\underline{w}_1+\underline{w}_2) = \underline{w}_1+\underline{w}_2 = \underline{w} = \mathrm{Id}(\underline{w}),$$

Quindi $(P_1 + P_2)(\underline{w}) = \mathrm{Id}(\underline{w})\ \forall \underline{w} \in V$ e l'identità è dimostrata.
Passiamo alle simmetrie.
Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$, allora

$$\mathrm{Id}(\underline{w}) - 2P_2(\underline{w}) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 - 2\underline{w}_2 = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 = S_1(\underline{w}),$$

dunque $S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2$. Similmente

$$2P_2(\underline{w}) - \mathrm{Id}(\underline{w}) = 2\underline{w}_2 - (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = S_2(\underline{w}),$$

da cui $S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}$.
Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Per definizione $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2$. La decomposizione di tale vettore è data da $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 + (-\underline{w}_2)$, pertanto

$$(S_1)^2(\underline{w}) = S_1(S_1(\underline{w})) = S_1(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = \underline{w}_1 - (-\underline{w}_2) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \underline{w} = \mathrm{Id}(\underline{w}).$$

Abbiamo quindi dimostrato che $(S_1)^2 = \mathrm{Id}$. L'identità $(S_2)^2 = \mathrm{Id}$ è analoga.