Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 20/10/23

Preambolo all'esercizio 1. Se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ allora definiamo la trasposta di A come la matrice $A^t \in M_{nm}(\mathbb{R})$ [1] che ha al posto ij il coefficiente a_{ji} di A. Quindi A^t ha come i-ma riga la i-ma colonna di A. Possiamo anche dire informalmente che A^t si ottiene da A scambiando le righe con le colonne. Ad esempio, la trasposta di

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

è la matrice

$$A^t = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Convincetevi che che $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è simmetrica se e solo se $A = A^t$ e che $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è antisimmetrica se e solo se $A = -A^t$.

Esercizio 1. Consideriamo $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ i sottospazi di $M_{nn}(\mathbb{R})$ costituiti rispettivamente dalle matrici simmetriche e antisimmetriche.

1.1. Dimostrare che

$$M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$$

Suggerimento: per dimostrare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ osservate che se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$.

1.2. Determinare una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ ed una base di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Calcolare la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Determinare la dimensione di U e la dimensione di W.
Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1,1,1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.

6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W = 3$.

6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

[1] attenzione allo scambio di m ed n

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.