Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 20/10/23. SOLUZIONI.

Esercizio 1. Consideriamo $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ i sottospazi di $M_{nn}(\mathbb{R})$ costituiti rispettivamente dalle matrici simmetriche e antisimmetriche.
1.1. Dimostrare che

$$M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$$

Suggerimento: per dimostrare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ osservate che se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$.
1.2. Determinare una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ ed una base di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$

Soluzione. Abbiamo già visto che $M_{33}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$. In generale possiamo scrivere

$$M_{nn}(\mathbb{R}) \ni A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

Ricordando che $(A^t)^t = A$ vediamo che il primo addendo a destra è una matrice simmetrica, mentre il secondo addendo a destra è una matrice antisimmetrica. Quindi $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$. Rimane quindi da vedere che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \underline{0}$. Ma se $A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ allora $a_{ij} = a_{ji}$ perché $A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $a_{ij} = -a_{ji}$ perché $A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$. Per un numero reale α si ha che $\alpha = -\alpha$ se e solo se $\alpha = 0$. Quindi A è la matrice nulla.

Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Queste 9 matrici tutte insieme formano un insieme di generatori di $M_{33}(\mathbb{R})$ ed essendo in numero di 9 sono anche una base di $M_{33}(\mathbb{R})$. È una base adattata alla decomposizione $M_{33}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Calcolare la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

Soluzione. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ ha dimensione 2, infatti una sua base è data da 1 e i.

Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Soluzione. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente indipendenti. Un modo è il seguente.
Sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti. Possiamo scegliere, ad esempio, la base canonica.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Determinare la dimensione di U e la dimensione di W.
Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione. Il sottospazio U è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^3$ e quindi $\dim U < 3$. I vettori $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ appartengono ad U e sono linearmente indipendenti perché non proporzionali. Quindi $\dim U \geq 2$. Ne segue che $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. L'intersezione di U e di W è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Possiamo risolvere esplicitamente il sistema (è un sistema non-quadrato ma non è difficile risolverlo [1]) troviamo che $U \cap W = \mathrm{Span}((1/3, -2/3, 1)) = \mathrm{Span}((1, -2, 3))$.

In particolare $\dim(U \cap W) = 1$. Ne segue, dalla formula di Grassmann, che $U + W$ ha dimensione uguale a $2 + 2 - 1 = 3$. Ma un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^3$ è necessariamente uguale ad $\mathbb{R}^3$. Quindi $\mathbb{R}^3 = U + W$; tuttavia, $\mathbb{R}^3$ **non** è somma diretta di questi sottospazi perché la lora intersezione non è uguale al vettore nullo.
Potevamo vedere che $\mathbb{R}^3 = U + W$ anche senza utilizzare la formula di Grassmann[2]; si veda l'ultima parte della soluzione del prossimo esercizio.

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ (perché (α, α, α) soddisfa l'equazione che definisce U se e solo se $\alpha = 0$). Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. Ne

[1] ad esempio, possiamo portare x_3 a destra delle due uguaglianze e considerarlo come un parametro, ponendo quindi $x_3 = s$. Poi risolviamo con Gauss il sistema in x_1, x_2 con termine noto dato da $(s, -s)^t$ dove t significa qui "trasposto"

[2] il compito era stato assegnato prima della spiegazione della formula di Grassmann

segue che $U+W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e $\dim(U+W)=3$; ma allora $U+W=\mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U+W=\mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.
Per vedere che $\dim(U+W)=3$, senza utilizzare Grassmann , potevamo anche ragionare come segue:
dato che $\dim U = 2$ si ha che U ha base costituita da 2 vettori linearmente indipendenti, cioè non-proporzionali, siano essi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$; ma allora i tre vettori di $U+V$ $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, (1,1,1)\}$ sono linearmente indipendenti; infatti se

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 (1,1,1) = \underline{0}$$

allora deve essere $\alpha_3 = 0$ perché altrimenti $(1,1,1)$ sarebbe il vettore nullo (il che non è) oppure una combinazione lineare di $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ il che non è perché $(1,1,1) \notin U$. Quindi $\alpha_3 = 0$; ma allora anche $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$ perché $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ sono linearmente indipendenti; quindi $\dim(U+W) \geq 3$ e dato che $U+W \leq \mathbb{R}^3$ ne deduciamo che $\dim(U+W)=3$ e $U+W=\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.
6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W = 3$.
6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

Soluzione. Ragionando come nell'esercizio 4 capiamo che $\dim W \leq 3$, perché W è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$. È anche chiaro che $\dim W \geq 2$ perché i vettori $(0,1,0,0)$ e $(1,0-1,0)$ sono linearmente indipendenti (perché non proporzionali) ed appartengono a W. È facile vedere che

$$(0,1,0,0)\,, \quad (1,0-1,0)\,, \quad (0,0,1,-1)$$

sono 3 vettori linearmente indipendenti di W e quindi $\dim W = 3$; infatti se

$$\alpha_1(0,1,0,0) + \alpha_2(1,0-1,0) + \alpha_3(0,0,1,-1) = \underline{0}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

da cui, ovviamente, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Quindi W ha dimensione 3. Sia $\underline{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^4$ non appartenente a W; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W, ad esempio $\underline{u} = (1,1,1,1)$. Allora $\text{Span}(\underline{u}) = \{(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed è subito visto che ha intersezione banale con W: $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann $\dim(U+W) = 3+1-0 = 4$; ma allora $U+W=\mathbb{R}^4$. Conclusione $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$. Se scegliamo $U' = \text{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}' \notin W$ e $\underline{u}' \neq \underline{u}$ allora $\mathbb{R}^4 = W \oplus U'$ ma $U \neq U'$. Ad esempio: $\underline{u}' = (3,2,2,1)$.
Anche in questo caso non era necessario utilizzare la formula di Grassmann; bastava ragionare come nell'esercizio precedente.

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Soluzione esercizio 7. L'intersezione dei due sottospazi è data dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che $C\underline{x} = \underline{0}$, con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi l'unica soluzione del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ è la soluzione banale $\underline{0}$. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Ma $\dim U \geq 2$ perché

$$U = \{\underline{x} \mid \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases} \}$$

e i vettori

$$(1, 0, 2, 0)\,, \quad (0, 1, -1, \frac{1}{4})$$

appartengono a U e sono non-proporzionali. Analogamente $\dim W \geq 2$. Ne segue che deve essere $\dim(U+W) = 4$ (non può certo essere maggiore di 4 dato che siamo in $\mathbb{R}^4$) da cui $U + W = \mathbb{R}^4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
Anche in questo caso potevate vedere che $\dim(U + W) = 4$ senza utilizzare Grassmann; bastava fissare 2 vettori non proporzionali in U (lo abbiamo già fatto) e due vettori non proporzionali in W e verificare che, insieme, erano linearmente indipendenti.