

**Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.**  
**Geometria. Canale 3.**  
**Compito a casa del 13/10/2023**

**Esercizio 1.** Sia  $\mathbb{R}_3[x]$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Stabilire se  $W$  è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

**Esercizio 2.** Sia  $V = \mathbb{R}[x]$  e sia  $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$ . Consideriamo  $q(x) = x^2 + 5x^4$ . Stabilire se  $q(x) \in \text{Span}(p)$ .

**Esercizio 3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$  vettori linearmente indipendenti. Verificare che se  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ ,  $c_j \neq 0 \forall j$ , allora i vettori

$$c_1 \underline{v}_1, \dots, c_k \underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

**Esercizio 4.** Una matrice  $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$  è detta *simmetrica* se  $a_{ij} = a_{ji}$  per ogni  $i, j$ . Una matrice  $A$  è detta *antisimmetrica* se  $a_{ij} = -a_{ji}$  per ogni  $i, j$ .

**4.1.** Verificare che il sottoinsieme  $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$  delle matrici simmetriche è un sottospazio.

**4.2.** Verificare che il sottoinsieme  $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$  delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

**Esercizio 5.** Sia  $V = \mathbb{R}^3$  e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di  $\mathbb{R}^3$ . Determinare le coordinate del vettore  $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$  in questa nuova base di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 6.** Sia  $V = \mathbb{R}^4$  e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.

Determinare una base per i seguenti sottospazi:

$$W_1 = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$$

$$W_2 = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

$$W_3 = \text{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$$