

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 06/10/23

Esercizio 1. Utilizzando il metodo di Gauss, discutere il seguente sistema lineare quadrato:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Abbiamo visto in classe che ogni sistema lineare quadrato è equivalente ad un sistema triangolare superiore.

Rileggere e capire la dimostrazione.

Dare la definizione di sistema lineare triangolare *inferiore*. Dimostrare che ogni sistema quadrato è equivalente ad un sistema triangolare inferiore.¹

Esercizio 3. Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare quadrato, con A matrice $n \times n$. Supponiamo che il sistema sia riducibile ad un sistema triangolare superiore con *pivots* tutti non nulli. Verificare che il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è allora equivalente ad un sistema diagonale $\text{Id}_n \underline{x} = \underline{c}$ con Id_n la matrice identità:

$$\text{Id}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

e dunque al sistema banale $\underline{x} = \underline{c}$ (che ha soluzione, ovviamente, $\underline{v} = \underline{c}$).

Suggerimento: ridurre ad un sistema triangolare superiore e poi fare uso dell'esercizio 2.

Esercizio 4. Applicare il procedimento messo a punto nell'esercizio 3 al sistema dell'esercizio 1:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Utilizzando il metodo di Gauss, studiare il sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ x + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

¹*Suggerimento:* utilizzare una riduzione di Gauss "a salire", partendo dall'ultima colonna.