Geometria. Corso di Laurea in Fisica.
Proff. P. Piazza e V.F. Zenobi. a.a. 2023-24.
Primo foglio di esercizi, del 29/9/2023

Esercizio 1. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo. Verificare l'unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento $g \in G$.

Esercizio 2. Sia $f : A \to B$ una bigezione, o applicazione biunivoca, e sia $f^{-1} : B \to A$ l'inversa di f. [1] Verificare che

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \,, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

dove per ogni insieme C l'applicazione id_C è l'applicazione identità, definita come $\mathrm{id}_C(c) := c$ per ogni $c \in C$.

Esercizio 3. Sia A un insieme e $G = \{f : A \to A \mid f \text{ bigezione}\}$. Sia $\circ$ la composizione fra applicazioni. Verificare in dettaglio che $(G, \circ)$ è un gruppo (visto rapidamente a lezione).

Esercizio 4. Sia ora $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Il gruppo G definito nell'esercizio precedente possiede allora una notazione specifica, che è $\mathcal{S}_n$, ed un nome specifico che è il *gruppo simmetrico di n oggetti*.
Scrivere tutti gli elementi del gruppo $\mathcal{S}_3$ (sono 6). Verificare che S_3 non è un gruppo commutativo.
Suggerimento: per scrivere, ad esempio, l'elemento di $\mathcal{S}_3$ che manda 1 in 3, 2 in 2 e 3 in 1 potete scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzate questa scrittura per studiare la composizione di due elementi.

Esercizio 5. Consideriamo il campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Consideriamo il sottoinsieme

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \sqrt{2}\beta \,, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

Verificare che le due operazioni di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inducono in questo insieme una struttura di anello [2]; dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un campo. Per l'inverso: ispiratevi all'inverso in $\mathbb{C}$....

Esercizio 6. Esprimere nella forma $a + ib$ i seguenti numeri complessi:

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 \;,\; (-i)^4 \;,\; (3 + 3i)(3 - 3i) \;,\; \frac{(1 + 2i)}{(1 - 2i)} \;.$$

[1] Vi ricordo che $f^{-1} : B \to A$ è definita come segue: preso $b \in B$ sappiamo che esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (perché f è suriettiva); inoltre a è unico dato che f è iniettiva; riassumendo esiste unico a tale che $f(a) = b$ e si pone $f^{-1}(b) = a$.

[2] Quindi, più precisamente, la somma di due elementi di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, visti come elementi di $\mathbb{R}$, è ancora un elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ e lo stesso è vero per il prodotto