Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 21/5/2016

Esercizio 1. Abbiamo visto nell'esercizio 4 del compito in classe del 20/5 che il polinomio $P(X) = X^4 + 3X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.

1.1. Dimostrare che $P(X)$ è riducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$ per ogni scelta di p primo.
Suggerimento: potete utilizzare la seguente informazione:
fra i tre elementi $\{[-1]_p, [5]_p, [-5]_p\}$ *almeno uno è un quadrato.*
1.2. Dimostrare che nessun traslato di $P(X)$, $T_{1,n}(P)$, soddisfa le ipotesi del criterio di Eisentein.

Esercizio 2. Sia R un anello. $\forall x, y \in R$ consideriamo $[x, y] = xy - yx$, detto il commutatore di x ed y. Sia S l'insieme di tutti i commutatori e sia (S) l'ideale generato da S.
2.1. Verificare che $R/(S)$ è commutativo.
2.2. Sia I un ideale di R. Verificare che R/I è commutativo se e solo se $(S) \subset I$.

Esercizio 3. Nell'anello $\mathbb{Z}[X]$ si consideri l'ideale $I := (3, X)$. Dimostrare che I è massimale.

Esercizio 4. Si consideri il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{12}$. Dimostrare che il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_{12}$ è isomorfo al gruppo di Klein.

Esercizio 5. Siano G e G' due gruppi finiti e supponiamo che $\mathrm{MCD}(|G|, |G'|) = 1$. Verificare che l'unico omomorfismo da G in G' è quello banale.