Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esame scritto del 09/02/2021. Compito A.

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	12	
2	12	
3	12	
Totale	36	

ATTENZIONE:

- DURATA: 1 ORA E 30 MINUTI.
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- POTETE UTILIZZARE IL RETRO DELLA PAGINA SE AVETE BISOGNO DI SPAZIO
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE FINALI NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- **TUTTI** I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE **SPENTI**
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

e l'operatore lineare associato $L_A \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

1.1. Determinare gli autovalori di L_A e una base di autovettori; verificare che tale base è ortogonale rispetto al prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^2$.

1.2. Determinare una base ortonormale, sempre rispetto al prodotto hermitiano canonico, di autovettori per L_A.

1.3. Stabilire se esiste una matrice $M \in U(2)$ tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale ed in caso affermativo determinarla.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a due a coefficienti reali. Sia $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(1+x) = x, \quad T(1-x) = -x, \quad T(x^2+1) = 2x^2.$$

2.1. Spiegare perché T è ben definita.
2.2. Determinare la matrice associata a T nella base standard $\{1, x, x^2\}$.
2.3. Determinare una base per il nucleo di T e una base per l'immagine di T.

Soluzione.

Risposta (solo (2.2) e (2.3)):

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\mapsto \underline{y}^T S \underline{x} \end{aligned}$$

associata alla matrice simmetrica

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.1. Determinare indici di positività, negatività e nullità di b.
3.2. Determinare una base per il sottospazio b-ortogonale $U^{\perp_b}$ del sottospazio $U \leq \mathbb{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana $y + z = 0$.
3.3. Vero o Falso: $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^{\perp_b}$. Elaborare.

Soluzione:

Risposta: