Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esame scritto del 25/1/2021. Compito A.

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	12	
2	12	
3	12	
Totale	36	

ORALE. Cerchiate la vostra scelta:

28/1/2021

16/2/2021

ATTENZIONE:

- DURATA: 1 ORA E 30 MINUTI.
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- POTETE UTILIZZARE IL RETRO DELLA PAGINA SE AVETE BISOGNO DI SPAZIO
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE FINALI NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- **TUTTI** I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE **SPENTI**
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^3, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico. Si consideri l'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.1 Determinare lo spettro $\mathrm{sp}(L_A)$ di L_A.
1.2 Spiegare in dettaglio perché dalla struttura di A possiamo affermare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A.
1.3 Determinare una tale base ortonormale di autovettori per L_A.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi U e W definiti rispettivamente come

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \left|\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} -1 \\ 6 \\ 2 \\ -6 \end{array}\right| \right\},$$

e

$$W = \left\{ (x, y, z, w)^t \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \right\}.$$

2.1 Determinare un insieme minimale di equazioni cartesiane per U.
2.2 Determinare una base per $U \cap W$ e una per $U + W$.

Soluzione.

Risposta:

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[X]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia data l'applicazione

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ p &\mapsto 2p - p(-1)(X^2 - X). \end{aligned}$$

3.1 Verificare che T è lineare, descriverne l'immagine, e determinarne una base per il nucleo.
3.2 Scrivere la matrice associata a T nella base $\mathcal{F} := \{2, -X, X^2\}$, scelta come base di partenza e come base di arrivo.

Soluzione:

Risposta: