Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esame scritto del 25/1/2021. Compito A. Soluzioni.

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	12	
2	12	
3	12	
Totale	36	

ATTENZIONE:

- DURATA: 1 ORA E 30 MINUTI.
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- POTETE UTILIZZARE IL RETRO DELLA PAGINA SE AVETE BISOGNO DI SPAZIO
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE FINALI NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- **TUTTI** I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE **SPENTI**
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^3, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico. Si consideri l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.1 Determinare lo spettro $\mathrm{sp}(L_A)$ di L_A.
1.2 Spiegare in dettaglio perché dalla struttura di A possiamo affermare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A.
1.3 Determinare una tale base ortonormale di autovettori per L_A.

Soluzione: Il polinomio caratteristico di L_A è dato da

$$p_{L_A}(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = -(\lambda-3)^2(\lambda+3).$$

Lo spettro di L_A è dunque dato da $\mathrm{sp}(L_A) = \{-3, 3\}$.

L'operatore L_A ha matrice associata nella base canonica uguale ad A; la base canonica è ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico e la matrice è simmetrica. Ne segue che L_A è simmetrico rispetto al prodotto scalare canonico e quindi, per il Teorema Spettrale, esiste una base ortonormale di autovettori.

L'autospazio relativo all'autovalore -3 avrà necessariamente dimensione uno, generato ad esempio dal vettore $\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}^t$. L'autospazio relativo all'autovalore 3 avrà dimensione 2, visto che la molteplicità algebrica di tale autovalore è 2 e l'operatore è diagonalizzabile. Una base per questo autospazio è data ad esempio da

$$\left\{ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Sappiamo che $\underline{v}_1$ è automaticamente ortogonale sia a $\underline{v}_2$ che a $\underline{v}_3$, perché autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali per un operatore simmetrico. Ortogonalizziamo ora la base $\{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$, sostituendo $\underline{v}_3$ con

$$\underline{v}_3' = \underline{v}_3 - \frac{\langle \underline{v}_3, \underline{v}_2 \rangle}{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle}\,\underline{v}_2 = \underline{v}_3 - \frac{\underline{v}_2^t \cdot \underline{v}_3}{\underline{v}_2^t \cdot \underline{v}_2}\,\underline{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

La base $\{v_1, v_2, v_3'\}$ cosí costruita è ora ortogonale. Per ottenerne una ortonormale è dunque sufficiente dividere ognuno dei vettori per la sua lunghezza, ottenendo la base

$$\left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{\sqrt{30}}{30}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix} \right\}.$$

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi U e W definiti rispettivamente come

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ -6 \end{vmatrix} \right\},$$

e

$$W = \left\{ (x,y,z,w)^t \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \right\}.$$

2.1 Determinare un insieme minimale di equazioni cartesiane per U.
2.2 Determinare una base per $U \cap W$ e una per $U + W$.

Soluzione. Per trovare equazioni cartesiane minimali per U effettuiamo la seguente eliminazione di Gauß

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 3 & 0 & 6 & y \\ -1 & -1 & 2 & z \\ 0 & 2 & -6 & w \end{array}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -3 & 9 & -3x+y \\ 0 & 0 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 0 & -6x+2y+3w \end{array}\right|$$

e troviamo dunque che $U = \{6x - 2y - 3w = 0\}$ (nonché che U ha dimensione 3).
Per determinare una base per $U \cap W$ risolviamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 6x - 2y - 3w = 0. \end{cases}$$

che ha come equazioni le equazioni cartesiane per U e W. Con un'eliminazione di Gauß troviamo

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array}\right|,$$

e dunque lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e una base è data da $\left|\begin{array}{cccc} 3 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right|^t$.
L'eliminazione di Gauß appena effettuata, guardando solo le prime due righe, ci dice anche che la dimensione di W è 2.
Dalla Formula di Grassmann otteniamo che $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3+2-1 = 4$, e dunque necessariamente $U + W = \mathbb{R}^4$. Una possibile base per $U + W$ è dunque data dalla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[X]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia data l'applicazione

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ p &\mapsto 2p - p(-1)(X^2 - X). \end{aligned}$$

3.1 Verificare che T è lineare, descriverne l'immagine, e determinarne una base per il nucleo.
3.2 Scrivere la matrice associata a T nella base $\mathcal{F} := \{2, -X, X^2\}$, scelta come base di partenza e come base di arrivo.

Soluzione: L'applicazione T è lineare, infatti per ogni $p, q \in \mathbb{R}_2[X]$, ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} T(\alpha\, p + \beta\, q) &= 2(\alpha\, p + \beta\, q) - (\alpha\, p + \beta\, q)(-1)(X^2 - X) \\ &= \alpha\big(2p - p(-1)(X^2 - X)\big) + \beta\big(2q - q(-1)(X^2 - X)\big) \\ &= \alpha\, T(p) + \beta\, T(q). \end{aligned}$$

Ogni polinomio nell'immagine di T ha la proprietà di annullarsi quando calcolato in -1, infatti

$$2p(-1) - p(-1)\big((-1)^2 - (-1)\big) = 2p(-1) - 2p(-1) = 0.$$

Quindi, $\mathrm{Im}(T) \leq \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(-1) = 0\}$, e chiaramente (una sola condizione lineare non banale) $\dim\{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(-1) = 0\} = 2$. D'altra parte, se $p \in \ker T$, allora necessariamente

$$p = \frac{p(-1)}{2}\,(X^2 - X),$$

e dunque $\ker T = \mathrm{Span}\{X^2 - X\}$. In particolare, si ha $\dim \ker T = 1$. Il Teorema della Dimensione ci dice che quindi $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$, e dunque necessariamente $\mathrm{Im}(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(-1) = 0\}$.
Per scrivere la matrice associata a T nella base data osserviamo che

$$\begin{aligned} T(2) &= 4 - 2(X^2 - X) = -2X^2 + 2X + 4 = 2 \cdot 2 - 2(-X) - 2X^2, \\ T(-X) &= -2X - X^2 + X = (-X) - X^2, \\ T(X^2) &= 2X^2 - X^2 + X = -(-X) + X^2, \end{aligned}$$

e dunque la matrice cercata è
$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$
Potevamo anche scrivere la matrice associata a T nella base canonica $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$, che è uguale a
$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$
e utilizzare la formula magica
$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id})$$
con
$$M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
e quindi
$$(M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}))^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
Potevamo anche caratterizzare il nucleo e l'immagine diversamente, utilizzando $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(T)$ oppure $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$. Utilizziamo ad esempio $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$ e cioè
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$
È chiaro dalla struttura di questa matrice (le ultime due colonne sono uguali, mentre le prime due non sono proporzionali) che $\mathrm{Im}(T)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}_2[X]$ generato dai vettori che hanno coordinate uguali alla prima e alla seconda colonna. Quindi
$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\{2 + X - X^2, X + X^2\}.$$
Analogamente $\mathrm{Ker}(T)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}_2[X]$ costituito dai vettori con coordinate in $\mathrm{Ker}A$. Non è difficile verificare che $\mathrm{Ker}A$ è generato da $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^t$ e quindi
$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Span}\{-X + X^2\}.$$