Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 16/01/2021

Esercizio 1. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale reale metrico. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Sia $S := A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}$ la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base. Sia $T : V \to V$ lineare e sia $A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$. Dimostrare che T è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $A^T SA = S$.
Suggerimento: Considerate la definizione di T ortogonale ($< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} >$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$); passate alla scrittura nelle coordinate associate a $\mathcal{B}$....

Esercizio 2. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale hermitiano. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Siano $\mathcal{B}$, S, T ed A come sopra.
Dimostrare che T è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $SA = A^H S$.
Dimostrare che T è un operatore unitario se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $A^H SA = S$.
Suggerimento: Scrivere le due definizioni (hermitiano e unitario) e passare in coordinate

Esercizio 3. Spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^2$ con base canonica fissata e prodotto hermitiano canonico. Consideriamo la forma sesquilineare $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$h(\left|\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right|) := \left|\begin{matrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{matrix}\right| H \left|\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right|$$

con $H = \left|\begin{matrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{matrix}\right|$. Sia A la matrice $A := \left|\begin{matrix} -1 & 0 \\ i & -1 \end{matrix}\right|$ e sia $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore lineare definito da A.
1. Dimostrare che h definisce un prodotto scalare hermitiano definito positivo.
2. Stabilire se L_A è un operatore hermitiano rispetto a h.

Esercizio 4. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 3 e consideriamo un piano vettoriale $\pi \leq V$. Verifiacare che la simmetria ortogonale rispetto a π è un operatore ortogonale.
Suggerimento: sia $r = (\pi)^{\perp}$; un vettore $\underline{v}$ di V si scrive in maniera unica come $\underline{v} = \underline{v}_\pi + \underline{v}_r$ con $\underline{v}_\pi \perp \underline{v}_r$. Dovete verificare che $\|S\underline{v}\| = \|\underline{v}\|$; sostituite a $\underline{v}$ la sua espressione; applicate la definizione di simmetria ortogonale.....
Generalizzare questo risultato ad un qualsiasi spazio metrico e alla simmetria ortogonale rispetto ad un qualsiasi sottospazio W.

Esercizio 5. Sia $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento affine in $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Si verifichi che esiste un solo piano contenente i tre punti $P_1(1, 2, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(2, -1, -3)$ e se ne dia un'equazione cartesiana.

Esercizio 6. Sia $RO(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio ordinario $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z).
Si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1, 2, 3)$ ed è perpendicolare alla retta r definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Suggerimento: determinare prima la giacitura del piano cercato; fra tutti i piani con giacitura assegnata (fascio improprio) determinate quello che passa per P.

Esercizio 7. Sia $RO(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t. \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione

$$x - y - z = 3.$$

Suggerimento: passare ad equazioni cartesiane della retta e considerare il fascio di piani per tale retta...