Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 16/01/2021. Soluzioni.

Esercizio 1. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale reale metrico. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Sia $S := A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}$ la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base. Sia $T : V \to V$ lineare e sia $A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$. Dimostrare che T è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $A^T SA = S$.
Suggerimento: Considerate la definizione di T ortogonale ($< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} >$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$); passate alla scrittura nelle coordinate associate a $\mathcal{B}$....

Soluzione. T ortogonale vuol dire

$$< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} > \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Passiamo a coordinate: se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$, questa uguaglianza si riscrive come

$$(A\underline{y})^T S(A\underline{x}) = \underline{y}^T S\underline{x},$$

che equivale a

$$\underline{y}^T A^T SA\underline{x} = \underline{y}^T S\underline{x}.$$

Per arbitrarietà di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ l'uguaglianza vale se e solo se

$$A^T SA = S$$

(che equivalente a $A^T S = SA^{-1}$.)

Esercizio 2. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale hermitiano. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Siano $\mathcal{B}$, S, T ed A come sopra.
Dimostrare che T è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $SA = A^H S$.
Dimostrare che T è un operatore unitario se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $A^H SA = S$.
Suggerimento: Scrivere le due definizioni (hermitiano e unitario) e passare in coordinate

Soluzione. Identica a quella precedente, utilizzando la scrittura in coordinate del prodotto scalare hermitiano: $< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{y}^H S\underline{x}$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^2$ con base canonica fissata e prodotto hermitiano canonico. Consideriamo la forma sesquilineare $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$h(\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}) := \begin{vmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{vmatrix} H \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

con $H = \begin{vmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{vmatrix}$. Sia A la matrice $A := \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ i & -1 \end{vmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore lineare definito da A.
1. Dimostrare che h definisce un prodotto scalare hermitiano definito positivo.
2. Stabilire se L_A è un operatore hermitiano rispetto a h.

Soluzione:
1. Dobbiamo dimostrare che h è definita positiva. Basta verificare che la forma di Sylvester della matrice hermitiana H è del tipo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Il metodo più rapido

per matrici 2×2 consiste nel calcolare il polinomio caratteristico e verificare che gli autovalori (che sono reali, dato che H è hermitiana, ed esplicitamente calcolabili) sono entrambi positivi. Il polinomio caratteristico di H è $P_H(\lambda)=\lambda^2-4\lambda-2$ che ha radici positive, quindi h è un prodotto hermitiano.

2. Sappiamo che L_A è hermitiano se e solo se $SA=A^HS$ e dato che un semplice conto mostra che ciò non è vero per le nostre particolari matrici, ne deduciamo che L_A **non** è hermitiano rispetto a h.

Esercizio 4. Sia $(V,<\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 3 e consideriamo un piano vettoriale $\pi\le V$. Verificare che la simmetria ortogonale rispetto a π è un operatore ortogonale.
Suggerimento: sia $r=(\pi)^\perp$; un vettore $\underline{v}$ di V si scrive in maniera unica come $\underline{v}=\underline{v}_\pi+\underline{v}_r$ con $\underline{v}_\pi\perp\underline{v}_r$. Dovete verificare che $\|S\underline{v}\|=\|\underline{v}\|$; sostituite a $\underline{v}$ la sua espressione; applicate la definizione di simmetria ortogonale.....
Generalizzare questo risultato ad un qualsiasi spazio metrico e alla simmetria ortogonale rispetto ad un qualsiasi sottospazio W.

Soluzione. Per definizione $S_\pi\underline{v}=-\underline{v}_r+\underline{v}_\pi$. Quindi

$$||S_\pi\underline{v}||^2=||-\underline{v}_r+\underline{v}_\pi||^2=<-\underline{v}_r,+\underline{v}_\pi,-\underline{v}_r+\underline{v}_\pi>$$

$$=<\underline{v}_r,\underline{v}_r>-2<\underline{v}_r,\underline{v}_\pi>+<\underline{v}_\pi,\underline{v}_\pi>$$

Ma $r\perp\pi$ per ipotesi, quindi $<\underline{v}_r,\underline{v}_\pi>=0$ da cui

$$||S_\pi\underline{v}||^2=<\underline{v}_r,\underline{v}_r>+<\underline{v}_\pi,\underline{v}_\pi>\,.$$

Calcoliamo ora $||\underline{v}||^2$: si ha

$$||\underline{v}||^2=<\underline{v},\underline{v}>=<\underline{v}_r,\underline{v}_r>+2<\underline{v}_r,\underline{v}_\pi>+<\underline{v}_\pi,\underline{v}_\pi>=<\underline{v}_r,\underline{v}_r>+<\underline{v}_\pi,\underline{v}_\pi>\,.$$

Quindi $||S_\pi\underline{v}||^2=||\underline{v}||^2$, che è quello che si doveva verificare.
Il caso generale è identico.

Esercizio 5. Sia $RA(O,\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ un riferimento affine in $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x,y,z). Si verifichi che esiste un solo piano contenente i tre punti $P_1(1,2,0)$, $P_2(1,1,1)$, $P_3(2,-1,-3)$ e se ne dia un'equazione cartesiana.

Soluzione. Per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano. Per verificare che i tre punti sono non-allineati basta scrivere le equazioni della retta per P_1 e P_2 e verificare che P_3 non soddisfa queste equazioni. Equivalentemente, basta calcolare i vettori direttori delle rette $P_1\,P_2$ e $P_1\,P_3$ e verificare che sono non-proporzionali. Seguiamo, ad esempio, il primo metodo. Le equazioni parametriche della retta $P_1\,P_2$ sono

$$\begin{cases} x=1\\ y=2-t\\ z=t \end{cases}$$

e vediamo subito che P_3 non può appartenere a questa retta dato che la sua prima coordinata è 2. Ne segue che i tre punti sono non-allineati.
Per scrivere l'equazione del piano basta utilizzare la formula vista nelle note. Si trova l'equazione:

$$6x+y+z-8=0\,.$$

Esercizio 6. Sia $RO(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio ordinario $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z).
Si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1, 2, 3)$ ed è perpendicolare alla retta r definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Suggerimento: determinare prima la giacitura del piano cercato; fra tutti i piani con giacitura assegnata (fascio improprio) determinate quello che passa per P.

Soluzione. Sia $ax + by + cz + d = 0$ l'equazione del piano cercato. Sappiamo che i coefficienti di giacitura (a, b, c) sono proporzionali ai parametri direttori della retta ortogonale, che è data nel testo dell'esercizio. I parametri direttori di r sono $(4, -5, -1)$ e quindi il nostro piano va cercato fra i piani del fascio improprio:

$$4x - 5y - z + d = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(1, 2, 3)$ si trova $d = 9$. L'equazione cercata è quindi

$$4x - 5y - z + 9 = 0\,.$$

Esercizio 7. Sia $RO(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t. \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione

$$x - y - z = 3.$$

Suggerimento: passare ad equazioni cartesiane della retta e considerare il fascio di piani per tale retta...

Soluzione. Dalle equazioni parametriche otteniamo subito equazioni cartesiane per s:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Quindi i piani per s hanno equazioni cartesiane

$$\lambda(2x - y - 2) + \mu(2x + z - 1) = 0,$$

e cioè

$$(2\lambda + 2\mu)x - \lambda y + \mu z + (-2\lambda - \mu) = 0$$

dove $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Un vettore normale a questo piano è quindi $((2\lambda + 2\mu), -\lambda, \mu)$. Un vettore normale a è invece $(1, -1, -1)$. Imponendo l'ortogonalità dei due vettori normali otteniamo l'equazione

$$(2\lambda + 2\mu)1 + (-\lambda)(-1) + \mu(-1) = 0$$

e cioè

$$3\lambda + \mu = 0.$$

Quindi il piano cercato ha equazione cartesiana

$$4x + y + 3z - 1 = 0.$$