Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta di preparazione all'esame.

15 Gennaio 2021

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	12	
3	11	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- 30 minuti ad esercizio
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (10 punti)
Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 con base canonica $\{1, X, X^2\}$.
Sia $<\, ,\, >: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$< p, q > := \int_{-1}^{1} pq dx\,.$$

$<\, ,\, >$ è definita positiva e definisce quindi un prodotto scalare.
1. Determinare la matrice associata alla proiezione ortogonale P sul sottospazio $W := \mathrm{Span}(1 + X) \equiv \mathbb{R}(1 + X)$ nella base canonica di V.
2. (i) Vero o Falso: P è un operatore ortogonale rispetto a $<\, ,\, >$.
(ii) Vero o Falso: P è un operatore diagonalizzabile.

Esercizio 2. (12 punti) Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da $q(x_1, x_2, x_3) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
1. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di q e la sua matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Stabilire se b è non-degenere.
2. Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b.
3. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico $\bullet$.
Determinare una base **ortogonale** di $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ che sia una base di Sylvester per b.

Esercizio 3. (11 punti)
Siano $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ le matrici date da

$$A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \quad A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

(i) Stabilire se A_0 è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Stabilire se A_0 è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
(ii) Determinare quali coppie in $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ sono simili su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. (per chi è stato veloce)
Spazio euclideo con riferimento cartesiano ortonormale $RO(O\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z).
Definizione: una retta ed un piano sono ortogonali se per le giaciture vale $W_r = (W_\pi)^\perp$.
Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $Q = (1, -1, 2)$ ed ortogonale al piano di equazione cartesiana $2X - Y + Z = 2$.