Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta di preparazione all'esame. Soluzioni.

15 Gennaio 2021

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	12	
3	11	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- 30 minuti ad esercizio
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (10 punti)
Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 con base canonica $\{1, X, X^2\}$. Sia $<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$< p, q >:= \int_{-1}^{1} pq dx \,.$$

$<\,,\,>$ è definita positiva e definisce quindi un prodotto scalare.
1. Determinare la matrice associata alla proiezione ortogonale P sul sottospazio $W := \mathrm{Span}(1+X) \equiv \mathbb{R}(1+X)$ nella base canonica di V.
2. **(i)** Vero o Falso: P è un operatore ortogonale rispetto a $<\,,\,>$.
(ii) Vero o Falso: P è un operatore diagonalizzabile.

Soluzione.

1. Consideriamo $W = \mathbb{R}(1+X)$ che ha ovviamente dimensione 1. Sappiamo che se $\{\underline{w}\}$ è una base ortonormale di W allora

$$P_W(1) =< 1, \underline{w} > \underline{w} \qquad P_W(X) =< X, \underline{w} > \underline{w} \qquad P_W(X^2) =< X^2, \underline{w} > \underline{w}.$$

Poichè $< 1+X, 1+X >= 8/3$ segue che una base ortonormale di W è data dal vettore $\underline{w} := \sqrt{3/8}(1+X)$ da cui

$$P_W(1) = 3/4(1+X) \qquad P_W(X) = 1/4(1+X) \qquad P_W(X^2) = 1/4(1+X).$$

Quindi la matrice della proiezione ortogonale su W nella base canonica di V, sia questa base $\mathcal{E}$, è

$$A = \begin{vmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

L'esercizio poteva anche essere risolto con un altro metodo. Identifichiamo V a $\mathbb{R}^3$ e scriviamo l'equazione cartesiana di $W^\perp$ traducendo in coordinate la condizione

$$q \in W^\perp \ \text{ se e solo se } \ < q, (1+X) >= 0 \,.$$

Otteniamo che $W^\perp$ ha equazione $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$. In una base $\mathcal{F}$ costituita dal vettore $(1+X)$ e da due vettori non-proporzionale in $W^\perp$, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} ,$$

la matrice dell'operatore è

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dalla nota formula

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P) = M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id})\, M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(P)\, M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$$

e dal fatto che $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = (M_{\mathcal{E},\mathcal{F}})^{-1}$ riotteniamo la matrice di prima.

2. È falso che P sia ortogonale; infatti un operatore ortogonale è iniettivo e cioè non è vero per P.
È vero che P è diagonalizzabile perché per definizione di proiezione ortogonale, P ha W come autospazio associato all'autovalore 1 e $W^\perp$ come autospazio associato all'autovalore 0; inoltre si ha $V = W \oplus W^\perp$ e quindi esiste una base di V costituita da autovettori per P.

Esercizio 2. (12 punti) Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da $q(x_1, x_2, x_3) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
1. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di q e la sua matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Stabilire se b è non-degenere.
2. Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b.
3. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico $\bullet$.
Determinare una base **ortogonale** di $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ che sia una base di Sylvester per b.

Soluzione: La forma bilineare simmetrica polare di q è data da

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_2 + y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_3 + y_2x_3$$

che ha matrice associata, nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Infatti $q(\underline{x})$ è un polinomio omogeneo di secondo grado $\sum_{i \le j} \alpha_{ij} x_i x_j$; la forma bilineare simmetrica polare è definita da $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$ con $A = (a_{ij})$ la matrice simmetrica definita da

$$a_{ii} = \alpha_{ii}\,, \quad a_{ij} := \frac{\alpha_{ij}}{2} =: a_{ji} \quad \text{se} \quad i < j.$$

Vedere le note sulle forme bilineari.
Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2\,.$$

Dato che $\lambda = 0$ non è radice del polinomio (ovvio, c'è un termine di grado zero differente da 0) abbiamo che b è non degenere. Utilizzando il criterio di Cartesio, possiamo subito affermare che b ha indice di positività 1 ed indice di negatività 2. Per rispondere alla terza domanda utilizziamo il teorema spettrale per l'operatore L_A, che è simmetrico rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$. Gli autovalori di L_A sono le radici del polinomio caratteristico $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$; di fatto il ponomio caratteristico si fattorizza direttamente e da questa fattorizzazione capiamo che le sue radici sono $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1. L'autospazio $V(-1)$ ha equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e quindi $V(2)$, che è uguale a $V(-1)^\perp$, è dato dalla retta vettoriale $\mathbb{R}(1, 1, 1)$. Una base *ortonormale* di autovettori è quindi data da

$$\mathcal{G} = \{\, \underline{g}_1 := (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\,, \quad \underline{g}_2 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad \underline{g}_3 := (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}\,.$$

Questa base diagonalizza simultaneamente la forma bilineare b e l'operatore L_A:

$$A_b^{\mathcal{G}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(L_A)\,.$$

Una base di Sylvester si ottiene normalizzando il primo vettore, dividendolo per $\sqrt{b(\underline{g}_1, \underline{g}_1)} = \sqrt{2}$. Una base di Sylvester è quindi

$$\mathcal{F} = \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\,, \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$$

Questa è effettivamente una base ortogonale e si ha

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3. (11 punti)
Siano $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ le matrici date da

$$A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$
$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \quad A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

(i) Stabilire se A_0 è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Stabilire se A_0 è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
(ii) Determinare quali coppie in $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ sono simili su $\mathbb{R}$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 1 = -(1-\lambda^2) - 1 = \lambda^2 - 2$$

Avendo due autovalori distinti A_0 è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e quindi anche su $\mathbb{C}$.
(ii) Sappiamo che se due matrici sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico; quindi se non hanno lo stesso polinomio caratteristico ne segue che non sono simili. Calcolando i polinomi caratteristici scopriamo che le uniche matrici che *possono* essere simili sono A_1 ed A_3 [1]. Un ulteriore ragionamento mostra poi che A_1 e A_3 sono effettivamente simili: infatti, calcolando gli autovalori, capiamo che sono entrambe simili alla matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Per transitività A_1 e A_3 sono simili.

Esercizio 4. (per chi è stato veloce)
Spazio euclideo con riferimento cartesiano ortonormale $RO(O\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z).
Definizione: una retta ed un piano sono ortogonali se per le giaciture vale $W_r = (W_\pi)^\perp$.
Determinare le equazioni cartesiane della retta passante per $Q = (1, -1, 2)$ ed ortogonale al piano di equazione cartesiana $2X - Y + Z = 2$.

Soluzione. La giacitura di π, W_π, ha equazione cartesiana $2X - Y + Z = 0$. Sappiamo che un vettore ortogonale a questa giacitura è dato da $(2, -1, 1)$. Quindi la retta cercata è la retta passante per Q e di parametri direttori $l = 2, m = -1, n = 1$. Le equazioni cartesiane di questa retta sono quindi

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y+1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \det \begin{vmatrix} x-1 & z-2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

[1] Attenzione: due matrici che hanno lo stesso polinomio carattteristico non sono necessariamente simili ! Ad esempio $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ hanno lo stesso polinomio carattersitico, λ^2, ma *non* sono simili (infatti moltiplicando a destra la matrice nulla con una qualsiasi matrice invertibile e moltiplicandola a sinistra per l'inversa di tale matrice otteniamo comunque la matrice nulla; per B non otteniamo mai la matrice nulla).