Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta di preparazione all'esame.

10 Gennaio 2021

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	11	
2	11	
3	11	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (11 punti)
Consideriamo $V = \mathbb{R}^2[t]$ e l'applicazione $T : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ definita da

$$T(p)(t) := tp'(t-1)$$

con p' la derivata di p rispetto a t [1]
1. Verificare che T è lineare.
2. Determinare autovalori ed autovettori di T e stabilire se T è diagonalizzabile; in caso affermativo determinare una base diagonalizzante.
3. Si ora $a \in \mathbb{R}$ e $T_a : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$T_a(p)(t) := tp'(t-a)$$

Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione T è diagonallizabile.

Esercizio 2. (11 punti)
Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ con base canonica $\mathcal{E}$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|.$$

fissata. Consideriamo l'applicazione $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$\phi(A) := \mathrm{Tr}(A^2).$$

1. Scrivere l'espressione in coordinate di ϕ verificando in tal modo che ϕ è una forma quadratica [2].
2. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di ϕ.
3. Determinare la forma di Sylvester di b e quindi indici di positività, negatività e nullità di b.
4. Determinare, se esiste, un vettore isotropo per b.

Esercizio 3. (11 punti)
Consideriamo le quadruple

$$\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ t \\ 1 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2(t-1) \\ 1 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2 \\ (t-1) \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c} 1 \\ t \\ 2 \\ 1 \end{array}\right|$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$ e sia W_t il loro Span in $\mathbb{R}^4$.
Determinare la dimensione di W_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Per quei $t \in \mathbb{R}$ tali che $\dim W_t < 4$ determinare equazioni **cartesiane** di un supplementare di W_t (e cioè di un sottospazio U_t tale che $W_t \oplus U_t = \mathbb{R}^4$).

[1] quindi $p'(t-1)$ denota la derivata di p calcolata in $(t-1)$.
[2] e cioè un polinomio omogeneo di secondo grado nelle coordinate associate ad $\mathcal{E}$