Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta di preparazione all'esame. Soluzioni.

10 Gennaio 2021

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	11	
2	11	
3	11	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (11 punti)
Consideriamo $V = \mathbb{R}^2[t]$ e l'applicazione $T : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ definita da

$$T(p)(t) := tp'(t-1)$$

con p' la derivata di p rispetto a t [1]
1. Verificare che T è lineare.
2. Determinare autovalori ed autovettori di T e stabilire se T è diagonalizzabile; in caso affermativo determinare una base diagonalizzante.
3. Si ora $a \in \mathbb{R}$ e $T_a : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$T_a(p)(t) := tp'(t-a)$$

Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione T è diagonallizabile.

Soluzione. Dato che la derivata di una somma è la somma delle derivate si ha:

$$T(p+q) = t(p+q)'(t-1) = t(p'+q')(t-1) = tp'(t-1) + tq'(t-1) = T(p) + T(q)$$

Analogamente si procede per $T(\alpha p)$ utilizzando che $(\alpha p)' = \alpha p'$. Quindi T è lineare.
Per determinare gli autovalori di T dobbiamo scrivere la matrice associata a T in una base; scegliamo la base canonica $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$. Si ha

$$T(1) = \underline{0}\,, \quad T(t) = t\,, \quad T(t^2) = t2(t-1) = -2t + 2t^2\,.$$

Ne segue che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Poniamo $A := M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$.
Ne segue che

$$\mathrm{sp}(T) = \{0, 1, 2\}$$

Avendo 3 autovalori distinti in uno spazio vettoriale di dimensione 3 T è diagonalizzabile. Capiamo subito che il polinomio 1 è un elemento del nucleo, e quindi un generatore dell'autospazio associato all'autovalore 0 e che t è un generatore per l'autospazio associato all'autovalore 1. L'autospazio associato all'autovalore 2 si ottiene calcolando $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{Id})$ e cioè $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$; ora

$$A - 2I_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi $V_T(2) \equiv \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{Id})$ ha equazioni cartesiane nelle coordinate (x_1, x_2, x_3) associate a $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 + 2x_3 = 0$$

Una tripla che soddisfa questo sistema è $(0, 2, -1)$; quindi $p = 2t - t^2$ è un generatore per $V_T(2)$. Riassumendo, la base

$$\{1, t, 2t - t^2\}$$

è una base diagonalizzante per T.
Passiamo all'ultima domanda. Si ha, ragionando come sopra

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T_a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

e quindi T_a è diagonalizzabile per ogni $a \in \mathbb{R}$ avendo tre autovalori distinti.

[1] quindi $p'(t-1)$ denota la derivata di p calcolata in $(t-1)$.

Esercizio 2. (11 punti)
Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ con base canonica $\mathcal{E}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

fissata. Consideriamo l'applicazione $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$\phi(A) := \mathrm{Tr}(A^2).$$

1. Scrivere l'espressione in coordinate di ϕ verificando in tal modo che ϕ è una forma quadratica [2].
2. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di ϕ.
3. Determinare la forma di Sylvester di b e quindi indici di positività, negatività e nullità di b.
4. Determinare, se esiste, un vettore isotropo per b.

Soluzione. Sia

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

Ovviamente

$$A^2 = \begin{vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{vmatrix};$$

quindi $\phi(A) := \mathrm{Tr}(A^2) = a^2 + 2bc + d^2$. La forma bilineare simmetrica di ϕ è

$$b(A, A') = aa' + bc' + cb' + dd'.$$

polare. Possiamo pensare a questa forma bilineare simmetrica come ad una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$, utilizzando l'isomorfismo $M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ che ad A associa (a, b, c, d). L'operatore simmetrico associato a questa forma bilineare simmetrica è dato da L_A con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Si ha $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 1)$ e quindi A ammette 3 autovalori positivi $(= 1)$ ed un autovalore negativo $(= -1)$. Ne segue, per il teorema spettrale/teorema di Sylvester che esiste una base $\mathcal{F}$ tale che

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e quindi l'indice di positività è 3, l'indice di negatività è 1, l'indice di nullità è 0.
Il vettore $(1, -1, 1, 1)$ è isotropo.

Esercizio 3. (11 punti)
Consideriamo le quadruple

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2(t-1) \\ 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ (t-1) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$ e sia W_t il loro Span in $\mathbb{R}^4$.
Determinare la dimensione di W_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Per quei $t \in \mathbb{R}$ tali che $\dim W_t < 4$ determinare equazioni **cartesiane** di un supplementare di W_t (e cioè di un sottospazio U_t tale che $W_t \oplus U_t = \mathbb{R}^4$).

[2] e cioè un polinomio omogeneo di secondo grado nelle coordinate associate ad $\mathcal{E}$

Soluzione: Occorre studiare il rango della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t & t \\ t & 2(t-1) & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Applichiamo Gauss: dopo il primo passo otteniamo subito

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & t-2 & t-2 \\ 0 & t-2 & 2-t & t-2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Se $t = 2$ la matrice ha rango 1 e quindi $W_{t=2}$ ha dimensione 1. Se $t \neq 2$ allora possiamo moltiplicare la seconda, terza e quarta riga di (1) per $1/(t-2)$ (sappiamo che otteniamo in questo modo una matrice dello stesso rango). Otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Riducendo ulteriormente otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne deduciamo che per ogni $t \neq 2$ la matrice che ha come colonne i generatori di W_t è non singolare ed ha quindi rango uguale a 4. Conclusione:

$$\dim W_t = 4 \text{ se } t \neq 2\,; \quad \dim W_t = 1 \text{ se } t = 2\,.$$

Per rispondere all'ultimo quesito ragioniamo come segue: per $t = 2$ sappiamo che $W_2 = \mathrm{Span}(\underline{w})$ con $\underline{w} = (1, 2, 2, 1)$. Consideriamo l'iperpiano U_2 di equazione cartesiana $x_1 + x_2 = 0$. Abbiamo scelto questa equazione in modo tale che $\underline{w}$ **non** la soddisfi. Quindi $\underline{w} \notin U_2$. Allora:

$$\dim U_2 = 3\,; \quad W_2 \cap U_2 = \underline{0}$$

e quindi, per Grassmann,

$$\dim(U_2 + W_2) = \dim U_2 + \dim W_2 = 3 + 1 = 4$$

Ne segue che $U_2 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$. Ovviamente potevamo scegliere altri supplementari; ad esempio se pensiamo $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico $\bullet$ allora possiamo scegliere $U_2 = W^\perp$. Si ha per certo $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ (fatto generale) e possiamo scrivere immediatamente l'equazione cartesiana di $W^\perp$ che è $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$.