Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta in classe.

8 Gennaio 2021

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	11	
2	11	
3	11	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (11 punti)
Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (-1,3,0)\,, \quad F(0,1,0) = (0,1,0)\,, \quad F(0,1,1) = (2,-1,1)$$

1.1 Verificare che la matrice associata ad F nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2 Stabilire se F è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di autovettori e la matrice associata ad F in questa base. Studiare l'iniettività e la suriettività di F.
1.3 Calcolare A^{1222}.

Esercizio 2. (11 punti)
In $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A\, \mathbf{x}$ con

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

0. Spiegare perché b definisce una forma bilineare simmetrica.
1. Determinare il nucleo (o radicale) di b.
2. Utilizzando opportuni vettori non-isotropi, determinare una base di Sylvester per b.
3. Determinare indici di positività, negatività e nullità di b.

Esercizio 3. (11 punti)
Nello spazio vettoriale V delle matrici reali $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideriamo l'endomorfismo F definito da

$$F(A) := \frac{A + A^t}{2}\,.$$

1. Verificare che la formula $< A, B >:= \mathrm{Tr}(B^T A)$ definisce un prodotto scalare in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(Vi ricordo che, per definizione, $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.)

2. Stabilire se F è simmetrico rispetto a questo prodotto scalare.
Suggerimento: considerate la base canonica di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$....

3. Vero o Falso: esiste una base *ortonormale* di $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), < \,,\, >)$ costituita da autovettori per F. Nel caso sia vero, determinare una tale base.