Geometria. Laurea in Fisica. a.a. 2020-2021

Canale 3.

Esercitazione scritta in classe.

8 Gennaio 2021

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	11	
2	11	
3	11	
Totale	33	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. (11 punti)
Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (-1,3,0)\,, \quad F(0,1,0) = (0,1,0)\,, \quad F(0,1,1) = (2,-1,1)$$

1.1 Verificare che la matrice associata ad F nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2 Stabilire se F è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di autovettori e la matrice associata ad F in questa base. Studiare l'iniettività e la suriettività di F.
1.3 Calcolare A^{1222}.

Soluzione.
1.1 Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica. Basta verificare che la matrice A ha come j-ma colonna le coordinate, nella base canonica, di $F(\underline{e}_j)$. Utilizzando la linearità si ha
$F(1,0,0) = F((1,1,0)-(0,1,0)) = F(1,1,0) - F(0,1,0) = (-1,3,0) - (0,1,0) = (-1,2,0)$
che è proprio la prima colonna di A. Analogamente si procede per le altre colonne.
1.2 Il polinomio caratteristico di F si può calcolare utilizzando la matrice A: otteniamo $P_T(\lambda) = P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$. Ne segue che F ha autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1. L'autospazio V_{-1} ha automaticamente dimensione 1; l'autospazio $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ ha dimensione $3 - 1 = 2$, come subito si verifica osservando che

$$A - I_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha rango 1. Per il Teorema fondamentale segue che F è diagonalizzabile (le radici del polinomio caratteristico sono reali e la molteplicità algebrica di ciascun autovalore è uguale alla molteplicità geometrica). Una base di autovettori si trova determinando due vettori linearmente indipendenti in V_1 ed un generatore della retta V_{-1}. Dal fatto che $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ segue che

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_3 = 0\}$$

ed una base di V_1 è allora

$$(1,0,1)\,, \quad (0,1,0)\,.$$

Analogamente V_{-1} ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e queste equazioni rappresentano la retta $\mathbb{R}(1,-1,0)$. In definitiva la base

$$\mathcal{W} := \{(1,0,1)\,, \quad (0,1,0)\,, \quad (1,-1,0)\}$$

è una base di autovettori. La matrice associata ad F in questa base è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

F è iniettiva e suriettiva dato che $\det \Delta = -1 \neq 0$.
1.3. Sappiamo che

$$\Delta = M_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(F)$$

Dalla formula magica segue che

$$A = (M_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}))^{-1} \cdot \Delta \cdot M_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id})$$

Quindi

$$A^2 = (M_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}))^{-1} \cdot \Delta^2 \cdot M_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id})$$

Ma $\Delta^2 = I_3$ e quindi $A^2 = I_3$ da cui $A^{1222} = I_3$.

Esercizio 2. (11 punti)
In $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A\, \mathbf{x}$ con

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

0. Spiegare perché b definisce una forma bilineare simmetrica.
1. Determinare il nucleo (o radicale) di b.
2. Utilizzando opportuni vettori non-isotropi, determinare una base di Sylvester per b.
3. Determinare indici di positività, negatività e nullità di b.

Soluzione.

0. La bilinearità di b segue dalle proprietà del prodotto righe per colonne. La simmetria di b segue dalla simmetria di A.

1. Sappiamo che fissata una base $\mathcal{E}$ con coordinate associate $\underline{x}$, il radicale $V^{\perp_b}$ ha equazioni cartesiane date da $A\underline{x} = \underline{0}$, con A la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$. In questo caso possiamo scegliere $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e quindi A è proprio la matrice data. Ne segue che $V^{\perp_b} = \mathrm{Ker} A$ e quindi una base per il radicale di b è data dal vettore $(0, -2, 1)$.

2+3. Poniamo $\underline{k}_1 := (0, -2, 1)$. Vogliamo completare questa base del radicale ad una base di Sylvester per b. Scegliamo un vettore non-isotropo fuori dal radicale, ad esempio $\underline{k}_2 := (0, 1, 0)$. Si ha $b(\underline{k}_2, \underline{k}_2) = 1$. Ora scegliamo un vettore non-isotropo fuori dal radicale, k_3, tale che $b(\underline{k}_2, \underline{k}_3) = 0$. Lo scegliamo nei vettori b-ortogonali a $\underline{k}_2$; il sottospazio dei vettori b-ortogonali a $\underline{k}_2$ ha equazione $b(\underline{x}, (0, 1, 0)) = 0$ e cioè, con semplice conto, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Il vettore $\underline{k}_3 := (1, -1, 0)$ appartiene a questo sottospazio e non è un multiplo di $\underline{k}_1$; inoltre $b((1, -1, 0), (1, -1, 0)) = -1$ è quindi $(1, -1, 0)$ è non-isotropo. I tre vettori trovati sono linearmente indipendenti (questo è di fatto automatico ma è anche verificabile direttamente) e, a meno dell'ordine, costituiscono una base di Sylvester per b. Per determinare una base di Sylvester basterà riordinare i vettori della base trovata ponendo

$$\underline{f}_1 = \underline{k}_2\,, \quad \underline{f}_2 = \underline{k}_3\,, \quad \underline{f}_3 = \underline{k}_1\,.$$

La matrice associata a b in questa base è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi l'indice di nullità è 1, l'indice di positività è 1 e l'indice di negatività è 1.

Esercizio 3. (11 punti)
Nello spazio vettoriale V delle matrici reali $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideriamo l'endomorfismo F definito da

$$F(A) := \frac{A + A^T}{2}\,.$$

1. Verificare che la formula $< A, B >:= \mathrm{Tr}(B^T A)$ definisce un prodotto scalare definito positivo in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(Vi ricordo che, per definizione, $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.)

2. Stabilire se F è simmetrico rispetto a questo prodotto scalare.
Suggerimento: considerate la base canonica di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$....

3. Vero o Falso: esiste una base *ortonormale* di $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), < , >)$ costituita da autovettori per F. Nel caso sia vero, determinare una tale base.

Soluzione.

1. La traccia è lineare; inoltre $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^T)$. Da queste due informazioni e dalle proprietà del prodotto righe per colonne segue subito che $< , >$ è una forma bilineare simmetrica. Inoltre $< A, A >=$

$\mathrm{Tr}(A^2) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$ e quindi $<\, , >$ è definito positivo. Possiamo concludere che $<\, , >$ è un prodotto scalare definito positivo.

2 + 3. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$; è subito visto che $\mathcal{E}$ è una base ortonormale rispetto a $<\, , >$. Quindi F è simmetrico se e solo se la matrice associata ad F nella base $\mathcal{E}$, $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)$, è simmetrica. Dalla definizione si ha, con qualche semplice conto, che la matrice associata ad F nella base $\mathcal{E}$ è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi F è simmetrico. Sicuramente esiste una base ortonormale costituita da autovettori per F perché F è simmetrico e vale il Teorema Spettrale. Per la determinazione di questa base calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di F:

$$P_F(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^3$$

L'applicazione F ha dunque autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 3, e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1. Una base dell'1-autospazio di F, $V_F(1)$, è costituita dalle tre matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Una base dello 0-autospazio di F, $\mathrm{Ker}\, F$, è costituita dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Queste 4 matrici sono quindi una base di $M_{2\,2}(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per F. Inoltre è facile verificare che le tre matrici nell'autospazio $V_F(1)$ sono fra loro ortogonali e sono inoltre ortogonali alla matrice che genera $\mathrm{Ker}\, F$ (perché F è simmetrico e quindi autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali). La base cercata è quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$