ALGEBRA 1 PB-Z
VI. 20 IV 2012

Esercizio 1. Siano $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, n un intero positivo e $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}^n$. Determinare la cardinalità dell'insieme

$$\mathrm{SSV}^n = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } V \text{ è un sottospazio vettoriale di } \mathbb{R}^n\}$$

Soluzione. Se $n = 0$, allora $\mathrm{SSV}^0 = \{\{0\}\}$; e, se $n = 1$, allora $\mathrm{SSV}^1 = \{\{0\},\ \mathbb{R}\}$.

Sia dunque, da ora in poi, $n \geq 2$. La potenza di SSV^n, $n \geq 2$ è quella del continuo; ossia, $|\mathrm{SSV}^n| = |\mathbb{R}|$. Mostreremo questo fatto utilizzando il teorema di Schroeder-Bernstein.

Innanzi tutto, introduciamo la seguente notazione (qui consideriamo l'intero n come fissato). Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ poniamo

$$\mathrm{SSV}^n_k = \{V \in \mathrm{SSV}^n \text{ tale che } \dim(V) = k\}.$$

D'ora in poi, ci limiteremo a considerare i casi "interessanti" $k \in \{1, ..., n-1\}$. I casi "banali" $k = 0$ e $k = n$, infatti, sono presto risolti, essendo $\mathrm{SSV}^n_0 = \{\{0\}\}$ e $\mathrm{SSV}^n_n = \{\mathbb{R}^n\}$.

Si proceda, ora, ricordando che ogni fissato $V \in \mathrm{SSV}^n_k$ è nucleo di un qualche omomorfismo di spazii vettoriali; per esempio, dell'omomorfismo φ_V qui di seguito descritto (ι_V essendo l'iniezione di V in $\mathbb{R}^n$)

$$\triangle_V \qquad V \xrightarrow{\iota_V} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_V} \mathbb{R}/V$$

Essendo l'unico scopo di questo esercizio quello di "contare" quanti sono i sottospazi di $\mathbb{R}^n$, possiamo prenderci la libertà di considerare costruzioni non canoniche. Così, da ora in poi, penseremo tutti gli spazii vettoriali che appariranno nel seguito come dotati di una base ed esprimeremo ogni omomorfismo tra spazi vettoriali per mezzo delle matrici associate a tali basi. A titolo di esempio, esplicitiamo gli isomorfismi (non canonici) che appaiono in $\triangle_V$

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} V \xrightarrow{\iota_V} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_V} \mathbb{R}/V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n-k}$$

Tutto ciò per dire che ogni $V \in \mathrm{SSV}^n_k$ ($k \in \{1, ..., n-1\}$) può esser descritto come lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare di $n - k$ equazioni linearmente indipendenti in n incognite (per quanto detto, un tale sistema non è univocamente determinato). Quest'osservazione ci permette di scrivere la prima delle due disuguaglianze di cui abbiamo bisogno per poter applicare il teorema di Schroeder-Bernstein. Infatti quel che possiamo dire è che, per ogni $k \in \{1, ..., n-1\}$, esiste un'applicazione suriettiva

$$\mathrm{SL}^n_{n-k} \longrightarrow \mathrm{SSV}^n_k,$$

dove SL^n_{n-k} è l'insieme dei sistemi lineari di $n-k$ equazioni linearmente indipendenti in n incognite. Dunque $|\mathrm{SL}^n_{n-k}| \geq |\mathrm{SSV}^n_k|$. Ora, poiché ogni sistema lineare è completamente descritto dalla matrice dei suoi coefficienti ([1]), possiamo affermare senza problemi che $|\mathrm{SL}^n_{n-k}| = |\mathbb{R}^{(n-k)\times n}| = |\mathbb{R}|$. Quindi, per ogni $k \in \{1, ..., n-1\}$, abbiamo $|\mathbb{R}| \geq |\mathrm{SSV}^n_k|$.

Da un'altra parte, per ogni $k \in \{1, ..., n-1\}$, esistono iniezioni $\mathbb{R} \to \mathrm{SSV}^n_k$; a titolo di esempio, esibiamo l'applicazione $\lambda^n_k : \mathbb{R} \to \mathrm{SSV}^n_k$ definita da

$$\mathbb{R} \quad \ni \quad c \quad \mapsto \quad \left\langle c\mathbf{e}_1,\ c^2\mathbf{e}_2, ...,\ c^k\mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}_n \right\rangle \quad \in \quad \mathrm{SSV}^n_k,$$

essendo $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ e "$\langle ... \rangle$" significando "spazio generato da ...".

Così facendo, abbiamo mostrato che $|\mathbb{R}| \leq |\mathrm{SSV}^n_k|$. Possiamo, dunque, concludere che $|\mathrm{SSV}^n_k| = |\mathbb{R}|$ e, quindi, che $|\mathrm{SSV}^n| = |\mathbb{R}|$, essendo $\mathrm{SSV}^n = \dot{\bigcup}_{k=0}^n \mathrm{SSV}^n_k$.

[1]La matrice associata a un sistema $\mathrm{S} \in \mathrm{SL}^n_{n-k}$ avrà $(n-k)$ righe, n colonne e sarà di rango $n-k$

Esercizio 2. Sia A un anello unitario e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ naturale positivo, sia $M_n(A)$ l'anello delle matrici quadrate $n \times n$ a valori in A. Si considerino le funzioni

$$\begin{array}{rccc} \delta_n : & A & \to & M_n(A) \\ & a & \mapsto & \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \kappa_n : & A & \to & M_n(A) \\ & a & \mapsto & \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix} \end{array}$$

e si dica se esse sono iniettive, suriettive, omomorfismi di gruppi, omomorfismi di anelli.

Soluzione. Se $n = 1$, allora entrambe δ_1 e κ_1 sono iniettive, suriettive, omomorfismi di gruppi e omomorfismi di anelli. Infatti, in questo caso, entrambe le applicazioni coincidono con l'applicazione identica di A in sé

$$\delta_1 = \mathrm{id_A} \quad \text{e} \quad \kappa_1 = \mathrm{id_A}$$

Sia dunque, da ora in poi, $n \geq 2$.

Le applicazioni δ_n e κ_n sono **entrambe iniettive**. Infatti, per ogni $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \neq a_2$, risulta

$$\delta_n(a_1) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_2 \end{pmatrix} = \delta_n(a_2)$$

e

$$\kappa_n(a_1) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_2 \end{pmatrix} = \kappa_n(a_2)$$

Le applicazioni δ_n e κ_n sono **entrambe non suriettive**. Infatti, essendo un anello unitario, l'insieme A contiene almeno due elementi tra loro distinti (0_A e 1_A). Possiamo quindi affermare che non tutte le matrici a valori in A sono diagonali (non suriettività di δ_n) e che non tutte le matrici a valori in A sono tali da avere entrate tutte uguali tra loro (non suriettività di κ_n). A titolo di esempio per entrambi i casi, basta considerare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1_A & \cdots & 1_A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_A & \cdots & 0_A \end{pmatrix}$$

la cui prima riga è composta da tutti 1_A e le cui restanti righe son composte da tutti 0_A.

Le applicazioni δ_n e κ_n sono **entrambe omomorfismi di gruppi**. Infatti, per ogni $a_1, a_2 \in A$, risulta

$$\delta_n(a_1+a_2) = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_2 \end{pmatrix} = \delta_n(a_1)+\delta_n(a_2)$$

e

$$\kappa_n(a_1+a_2) = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_2 \end{pmatrix} = \kappa_n(a_1)+\kappa_n(a_2)$$

L'applicazione δ_n è un omomorfismo di anelli. Infatti, per ogni $a_1, a_2 \in A$, risulta

$$\delta_n(a_1a_2) = \begin{pmatrix} a_1a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_2 \end{pmatrix} = \delta_n(a_1)\circ\delta_n(a_2)$$

L'applicazione κ_n non è un omomorfismo di anelli. Infatti, per ogni $a_1, a_2 \in A$, risulta

$$\kappa_n(a_1a_2) = \begin{pmatrix} a_1a_2 & \cdots & a_1a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_2 & \cdots & a_1a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_2 \end{pmatrix} = \kappa_n(a_1)\circ\kappa_n(a_2)$$

Esercizio 3. Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$\triangle_n \qquad \sum_{h=1}^{n}(3h^2 - h - 2) = n(n+2)(n-1).$$

Soluzione. Base Se $n = 1$, allora entrambi i membri di $\triangle_n$ sono uguali a 0 (e, quindi, uguali tra loro). Infatti, da un lato

$$\sum_{h=1}^{n}(3h^2 - h - 2) = 3 - 1 - 2 = 0$$

e, dall'altro lato

$$n(n+2)(n-1) = 1(2)(0) = 0.$$

Passo. Mostriamo che la verità di $\triangle_n$ implica quella di $\triangle_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{h=1}^{n+1}(3h^2 - h - 2) &= \textstyle\sum_{h=1}^{n}(3h^2 - h - 2) + 3(n+1)^2 - (n+1) - 2 \\
&= n(n+2)(n-1) + 3n^2 + 6n + 3 - n - 1 - 2 \\
&= n(n+2)(n-1) + 3n^2 + 5n \\
&= n((n+2)(n-1) + 3n + 5) \\
&= n(n^2 + 4n + 3) \\
&= n(n+1)(n+3) \\
&= (n+1)((n+1)+2)((n+1)-1)
\end{aligned}$$

QDE.

Esercizio 4. Si determini la cardinalità degli insiemi

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \{p(\mathrm{X}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}] \mid p(\sqrt{7}) \text{ è } \textbf{irrazionale}\} \\ \mathrm{P} &= \{p(\mathrm{X}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}] \mid p(\sqrt{7}) \text{ è } \textbf{razionale}\} \end{aligned}$$

Soluzione. Entrambi gli insiemi D e P hanno la potenza del numerabile. Mostriamo questo fatto usando il teorema di Schroeder-Bernstein.

Da un lato, le inclusioni $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ e $\mathrm{P} \subseteq \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ implicano che $|\mathrm{D}| \leq |\mathbb{Q}[\mathrm{X}]| = |\mathbb{N}|$ e, rispettivamente, $|\mathrm{P}| \leq |\mathbb{Q}[\mathrm{X}]| = |\mathbb{N}|$.

Da un altro lato, esistono applicazioni iniettive da $\mathbb{N}$ in D e, rispettivamente, P. Esempii di tali iniezioni sono le applicazioni $a_{\mathrm{D}} : \mathbb{N} \to \mathrm{D}$ e $a_{\mathrm{P}} : \mathbb{N} \to \mathrm{P}$ definite da

$$a_{\mathrm{D}}(n) = n\mathrm{X} \quad \text{e, rispettivamente,} \quad a_{\mathrm{P}}(n) = n\mathrm{X}^2$$

Ora, l'esistenza di applicazioni iniettiva da $\mathbb{N}$ in D e P implica che $|\mathrm{D}| \geq |\mathbb{Q}[\mathrm{X}]| = |\mathbb{N}|$ e, rispettivamente, $|\mathrm{P}| \geq |\mathbb{Q}[\mathrm{X}]| = |\mathbb{N}|$ ([2]).

Quindi $|\mathrm{D}| = |\mathbb{N}|$ e $|\mathrm{P}| = |\mathbb{N}|$.

[2] Esistono moltissime altre applicazioni iniettive da $\mathbb{N}$ in D e P. Qui di seguito, alcune delle iniezioni da Voi trovate durante le esercitazioni in classe; esse sono le applicazioni $c_{\mathrm{D}}, e_{\mathrm{D}} : \mathbb{N} \to \mathrm{D}$ e $c_{\mathrm{P}}, k_{\mathrm{P}}, e_{\mathrm{P}} : \mathbb{N} \to \mathrm{P}$ definite da

$$c_{\mathrm{D}}(n) = \mathrm{X} + n, \quad e_{\mathrm{D}}(n) = \mathrm{X}^{2n+1}$$

e, rispettivamente,

$$c_{\mathrm{P}}(n) = \mathrm{X}^2 + n, \quad k_{\mathrm{P}}(n) = n, \quad e_{\mathrm{P}}(n) = \mathrm{X}^{2n}$$

Esercizio 5. Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta $3^{2n} - 1 \in 8\mathbb{Z}$.

Soluzione. Iniziamo osservando che dire $3^{2n} - 1 \in 8\mathbb{Z}$ (per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) equivale a dire $3^{2n} - 1 \equiv_8 0$ (per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) che, a sua volta, equivale a dire $3^{2n} \equiv_8 1$ (per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Ora, poiché $3^2 = 9 \equiv_8 1$, abbiamo che $3^{2n} \equiv_8 (3^2)^n \equiv_8 1^n \equiv_8 1$ (per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$); ossia, l'asserto.

Esercizio 6. Siano $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi e $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{Z}$. Determinare la cardinalità dell'insieme

$$\text{Sottogruppi}(\mathbb{Z}) = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \text{ tale che } H \text{ è un sottogruppo di } (\mathbb{Z}, +)\}$$

Soluzione. La potenza di Sottogruppi($\mathbb{Z}$) è quella del numerabile. Infatti, come mostrato a lezione, da una parte, ogni sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$ è del tipo $n\mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{N}$; da un'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il sottoinsieme $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$. Quindi

$$\text{Sottogruppi}(\mathbb{Z}) = \{n\mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

così che $|\text{Sottogruppi}(\mathbb{Z})| = |\mathbb{N}|$.

Esercizio 7. Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$\square_n \qquad \sum_{h=1}^{n} h2^h = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Soluzione. Base. Se $n = 1$, allora entrambi i membri di $\square_1$ sono uguali a 2 e, quindi, uguali tra loro.

Passo. Mostriamo che la verità di $\square_n$ implica quella di $\square_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{h=1}^{n+1} h2^h &= \textstyle\sum_{h=1}^{n} h2^h + (n+1)2^{n+1} \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\
&= 2n2^{n+1} + 2 \\
&= ((n-1)+1)2^{(n+1)+1} + 2
\end{aligned}$$

QDE.

Esercizio 8. Sia A un insieme non vuoto. Per ogni $f : A \to A$ sia $\varrho_f \subseteq A \times A$ la relazione su A definita ponendo, per ogni $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 \ \varrho_f \ a_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = f(a_1)$$

Si mostri che

I. la relazione ϱ_f è riflessiva se e solo se $f = \mathrm{id}_A$

II. la relazione ϱ_f è simmetrica se e solo se $f \circ f = \mathrm{id}_A$

III. la relazione ϱ_f è transitiva se e solo se $f \circ f = f$

Soluzione. I. La relazione ϱ_f è riflessiva se e solo se per ogni $a \in A$ risulta $a \varrho_f a$; ossia, se e solo se per ogni $a \in A$ risulta $a = f(a)$; ossia, se e solo $f = \mathrm{id}_A$.

II. La relazione ϱ_f è simmetrica se e solo se $a_1 \varrho_f a_2$ implica $a_2 \varrho_f a_1$; ossia, se e solo se $a_2 = f(a_1)$ implica $a_1 = f(a_2)$; ossia, se e solo se per ogni $a_1 \in A$ risulta $f(f(a_1)) = a_1$; ossia, se e solo se $f \circ f = \mathrm{id}_A$.

II. La relazione ϱ_f è transitiva se e solo se $a_1 \varrho_f a_2$ e $a_2 \varrho_f a_3$ implicano $a_1 \varrho_f a_3$; ossia, se e solo se $a_2 = f(a_1)$ e $a_3 = f(a_2)$ implicano $a_3 = f(a_1)$; ossia, se e solo se $a_3 = f(f(a))$ implica $a_3 = f(a_1)$; ossia, se e solo se $f \circ f = f$.

Esercizio 9. Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi e, per ogni $z \in \mathbb{C}$, si denoti con $\bar{z}$ l'elemento coniugato di z. Si considerino su $\mathbb{C}$ le relazioni α e β definite ponendo per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \alpha z_2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 = \overline{z_2 - z_1} \qquad\qquad z_1 \beta z_2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 = \overline{z_1 - z_2}$$

Dire se α e β sono di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere geometricamente gli insiemi quoziente $\mathbb{C}/\alpha$ e $\mathbb{C}/\beta$.

Soluzione. Alfa. La relazione α è di equivalenza. Infatti, basta osservare che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ risulta $z_1 \alpha z_2$ se e solo se $z_1 - z_2 = \overline{z_2 - z_1}$; ossia, se e solo se $z_1 + \overline{z_1} = z_1 + \overline{z_1}$; ossia se e solo se $2\mathrm{Re}(z_1) = 2\mathrm{Re}(z_2)$; ossia, se e solo se $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$. Quindi α coincide con la relazione associata alla funzione $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e, dunque, è di equivalenza.

L'insieme quoziente $\mathbb{C}/\alpha$ è l'insieme delle rette verticali tracciate sul piano di Gauß.

Beta. La relazione β è di equivalenza. Infatti, basta osservare che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ risulta $z_1 \beta z_2$ se e solo se $z_1 - z_2 = \overline{z_1 - z_2}$; ossia, se e solo se $z_1 - \overline{z_1} = z_1 - \overline{z_1}$; ossia se e solo se $2\mathrm{Im}(z_1) = 2\mathrm{Im}(z_2)$; ossia, se e solo se $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$. Quindi β coincide con la relazione associata alla funzione $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e, dunque, è di equivalenza.

L'insieme quoziente $\mathbb{C}/\beta$ è l'insieme delle rette orizzontali tracciate sul piano di Gauß.