ALGEBRA 1 PB-Z
VI. 20 IV 2012

Esercizio 1. Siano $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, n un intero positivo e $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}^n$. Determinare la cardinalità dell'insieme

$$\{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } V \text{ è un sottospazio vettoriale di } \mathbb{R}^n\}$$

Esercizio 2. Sia A un anello unitario e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ naturale positivo, sia $M_n(A)$ l'anello delle matrici quadrate $n \times n$ a valori in A. Si considerino le funzioni

$$\begin{array}{cccc} \delta_n : & A & \to & M_n(A) \\ & a & \mapsto & \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \kappa_n : & A & \to & M_n(A) \\ & a & \mapsto & \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix} \end{array}$$

e si dica se esse sono iniettive, suriettive, omomorfismi di gruppi, omomorfismi di anelli.

Esercizio 3. Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$\sum_{h=1}^{n}(3h^2 - h - 2) = n(n+2)(n-1).$$

Esercizio 4. Si determini la cardinalità degli insiemi

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \{p(\mathrm{X}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}] \mid p(\sqrt{7}) \text{ è } \textbf{irrazionale}\} \\ \mathrm{P} &= \{p(\mathrm{X}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}] \mid p(\sqrt{7}) \text{ è } \textbf{razionale}\} \end{aligned}$$

Esercizio 5. Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta $3^{2n} - 1 \in 8\mathbb{Z}$.

Esercizio 6. Siano $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi e $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{Z}$. Determinare la cardinalità dell'insieme

$$\{H \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \text{ tale che } H \text{ è un sottogruppo di } (\mathbb{Z}, +)\}$$

Esercizio 7. Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$\sum_{h=1}^{n} h2^h = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Esercizio 8. Sia A un insieme non vuoto. Per ogni $f : A \to A$ sia $\varrho_f \subseteq A \times A$ la relazione su A definita ponendo, per ogni $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 \ \varrho_f \ a_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = f(a_1)$$

Si mostri che

I. la relazione ϱ_f è riflessiva se e solo se $f = \mathrm{id}_A$
II. la relazione ϱ_f è simmetrica se e solo se $f \circ f = \mathrm{id}_A$
III. la relazione ϱ_f è transitiva se e solo se $f \circ f = f$

Esercizio 9. Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi e, per ogni $z \in \mathbb{C}$, si denoti con $\bar{z}$ l'elemento coniugato di z. Si considerino su $\mathbb{C}$ le relazioni α e β definite ponendo per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \alpha z_2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 = \overline{z_2 - z_1} \qquad\qquad z_1 \beta z_2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 = \overline{z_1 - z_2}$$

Dire se α e β sono di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere geometricamente gli insiemi quoziente $\mathbb{C}/\alpha$ e $\mathbb{C}/\beta$.