Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Soluzioni del primo foglio di esercizi

Soluzione esercizio 1. Denotiamo con $\bullet$ l'operazione in G. Supponiamo che g_0 e g_0' siano due elementi neutri. Vogliamo dimostrare che $g_0 = g_0'$. Ma $g_0 \bullet g = g = g \bullet g_0$ $\forall g \in G$. In particolare $g_0 \bullet g_0' = g_0'$. D'altra parte anche g_0' è un elemento neutro e quindi, ragionando come sopra, abbiamo che $g_0' \bullet g_0 = g_0 = g_0 \bullet g_0'$. In definitiva:

$$g_0 = g_0 \bullet g_0' = g_0'$$

e abbiamo finito.
Sia ora g un elemento di G e siano g' e $\tilde{g}'$ due elementi inversi di g. Vogliamo dimostrare che sono uguali. Sia e l'elemento neutro di G. Si ha

$$g' = g' \bullet e = g' \bullet (g \bullet \tilde{g}') = (g' \bullet g) \bullet \tilde{g}' = e \bullet \tilde{g}' = \tilde{g}'$$

e abbiamo finito.

Soluzione esercizio 2. Dobbiamo verificare che se $f : A \to B$ è bigettiva e $f^{-1} : B \to A$ è la sua inversa, allora $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$. Ricordiamo che se $\beta \in B$ allora l'insieme $f^{-1}(\beta) \subset A$ è non vuoto (perché f è surgettiva) e costituito da un unico elemento $\alpha \in A$ (perché f è iniettiva); per definizione $f(\alpha) = \beta$ (perché α è nella controimmagine di β). Vi ricordo anche che la funzione inversa f^{-1} calcolata in β vale proprio α. Quindi

$$(f \circ f^{-1})(\beta) = f(f^{-1}(\beta)) = f(\alpha) = \beta = \mathrm{Id}_B(\beta)$$

da cui dediciamo, dato che β è arbitrario, che $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$. Per dimostrare che $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ procediamo analogamente: $(f^{-1} \circ f)(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha))$; ma la funzione inversa applicata a $f(\alpha)$ è uguale all'unico elemento di A che ha come immagine $f(\alpha)$; questo elemento è, ovviamente, α. Conclusione $(f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha = \mathrm{Id}_A(\alpha)$ e, dato che α è arbitrario, ne deduciamo che $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Soluzione esercizio 3. Dobbiamo innanzitutto verificare l'associatività della composizione. Se f, g, h sono applicazioni di A in sé allora $((f \circ g) \circ h)(a)$ è uguale, per definizione di composizione, a $(f \circ g)(h(a))$ che è uguale, sempre per definizione di $f \circ g$, all'elemento $f(g(h(a)))$. È facile verificare che questo elemento è anche uguale a $(f \circ (g \circ h))(a)$ e quindi $\forall a \in A$

$$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ (g \circ h))(a)$$

da cui l'associatività. Poi occorre trovare un elemento neutro; consideriamo l'applicazione identità Id_A. Si ha allora $f \circ \mathrm{Id}_A = f = \mathrm{Id}_A \circ f$ (basta applicare le definizioni); quindi Id_A è l'elemento neutro. Infine, per ogni f occorre trovare l'elemento inverso: dato che f è bigettiva basta prendere f^{-1} perché allora sappiamo che $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_A = f^{-1} \circ f$.

Soluzione esercizio 4. Consideriamo $A = \{1, 2, 3\}$. I sei elementi di $\mathcal{S}_3$ sono

$$\mathrm{Id}_A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \delta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \epsilon := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha che $\delta \circ \alpha = \epsilon$ mentre $\alpha \circ \delta = \beta$; ne segue che

$$\delta \circ \alpha \neq \alpha \circ \delta$$

e quindi $\mathcal{S}_3$ **non** è un gruppo commutativo.

Soluzione esercizio 5. Dobbiamo verificare che le operazioni in $\mathbb{R}$ inducono in

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \sqrt{2} \cdot \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

un'operazione di somma ed un'operazione di prodotto e che rispetto a queste operazioni $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un campo. È immediato verificare, utilizzando le proprietà di $\mathbb{R}$, che

$$(\alpha + \sqrt{2} \cdot \beta) + (\alpha' + \sqrt{2} \cdot \beta') = (\alpha + \alpha') + \sqrt{2} \cdot (\beta + \beta')$$
$$(\alpha + \sqrt{2} \cdot \beta) \cdot (\alpha' + \sqrt{2} \cdot \beta') = (\alpha \cdot \alpha' + 2\beta \cdot \beta') + \sqrt{2} \cdot (\alpha \cdot \beta' + \alpha \cdot \beta')$$

Dato che i membri a destra sono in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ne deduciamo che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ eredita da $\mathbb{R}$ le due operazioni, somma e prodotto [1]. Dalle proprietà di $\mathbb{R}$ otteniamo subito che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario con elemento neutro additivo $0 + \sqrt{2} \cdot 0 \equiv 0$ ed elemento neutro moltiplicativo $1 + \sqrt{2} \cdot 0 \equiv 1$. Rimane da vedere che questo anello commutativo unitario è un campo: sia $x \neq 0$ un elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ diverso dall'elemento neutro additivo; quindi $x = \alpha + \sqrt{2} \cdot \beta$ con α e β non entrambi nulli. Sia

$$x^{-1} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{2} \cdot \beta}$$

il suo inverso in $\mathbb{R}$. Moltiplichiamo e dividiamo x^{-1} per $\alpha - \sqrt{2} \cdot \beta$ che è diverso dallo 0 addditivo per ipotesi, ottenendo

$$x^{-1} = \frac{\alpha - \sqrt{2}\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 2\beta^2} + \sqrt{2} \cdot \frac{-\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2}$$

e a destra c'e' un elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Soluzione esercizio 6.

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1(\equiv -1 + i0),\ (-i)^4 = 1,\ (3+3i)(3-3i) = 18,\ \frac{(1 + 2i)}{(1 - 2i)} = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}.$$

[1] A priori la somma e/o il prodotto avrebbero potuto dare elementi fuori da $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$