Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi per il pomeriggio del 28/05/2020. Soluzioni.

Esercizio 1. Nel piano affine complesso $A^2(\mathbb{C})$ è data la curva algebrica $\mathcal{C}_A$ di equazione $X + Y + Y^4 = 0$.
1. Scrivere l'equazione della curva algebrica $\mathcal{C}$ in $P^2(\mathbb{C})$ ottenuta per chiusura proiettiva rispetto a X_0.
2. Scrivere l'equazione della curva algebrica in $A^2(\mathbb{C}) = P^2(\mathbb{C}) \setminus H_1$, $H_1 = \{X_1 = 0\}$, ottenuta per deomogenizzazione di $\mathcal{C}$ rispetto a X_1.
3. Verificare che $\mathcal{C}$ ammette un unico punto singolare S; determinare la molteplicità di S.
4. Scrivere l'equazione di ogni tangente principale in S e per ognuna di esse la relativa molteplicità d'intersezione con la curva nel punto S. (*Suggerimento*: può essere utile utilizzare il punto **2**.)
5. Scrivere l'equazione dell'Hessiana $\mathcal{H}$ associata a $\mathcal{C}$. Dimostrare che $\mathcal{C}$ ha un unico punto di flesso F.
6. Scrivere l'equazione cartesiana della tangente di flesso in F, τ, e determinare $I(\mathcal{C}, \tau; F)$.

Soluzione:
1. La chiusura proiettiva di $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}$, in $P^2(\mathbb{R}) = A^2(\mathbb{R}) \cup H_0$ ha equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ con F il polinomio omogeneo di grado 4 ottenuto omogenizzando il polinomio $f(X,Y) = X + Y + Y^4$ rispetto a X_0; per definizione

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^4 f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}) = X_0^3 X_1 + X_0^3 X_2 + X_2^4$$

2. Deomogenizziamo $\mathcal{C}$ rispetto a X_1, ponendo $X_1 = 1$, $X_0 = W$, $X_2 = Z$ e otteniamo la curva $\mathcal{D}_A$ di equazione $W^3 + W^3 Z + Z^4 = 0$.
3. Denotiamo le derivate parziali F_{X_j} brevemente con F_j. Si ha

$$F_0 = 3X_0^2 X_1 + 3X_0^2 X_2\,, \quad F_1 = X_0^3\,, \quad F_2 = X_0^3 + 4X_2^3\,.$$

È facile verificare che l'unico punto in cui si annullano tutte le derivate prime è il punto $S = [0, 1, 0]$. Le derivate seconde sono:

$$F_{0\,0} = 6X_0X_1 + 6X_0X_2\,, \quad F_{1\,0} = 3X_0^2\,, \quad F_{2\,0} = 3X_0^2$$
$$F_{0\,1} = F_{1\,0}\,, \quad F_{1\,1} = 0\,, \quad F_{2\,1} = 0$$
$$F_{0\,2} = F_{2\,0}\,, \quad F_{1\,2} = F_{2\,1}\,, \quad F_{2\,2} = 12X_2^2$$

e tutte queste derivate si annullano in S. Ne segue che S è almeno triplo. D'altra parte $F_{0\,0\,0} = 6X_1 + 6X_2$ che non è zero in S. Quindi S è un punto triplo.
4. Studiamo la natura del punto S considerandolo in $A^2(\mathbb{C}) = P^2(\mathbb{C}) \setminus H_1$, con $H_1 = \{X_1 = 0\}$. Utilizzando coordinate W, Z come nel punto **2** capiamo che S è l'origine di questo piano affine numerico; inoltre sappiamo che la curva $\mathcal{C}$ ristretta a $P^2(\mathbb{C}) \setminus H_1$ ha equazione $W^3 + W^3 Z + Z^4 = 0$. Ci siamo quindi ricondotti a studiare una curva affine con una singolarità nell'origine. Dalla struttura dell'equazione $W^3 + W^3 Z + Z^4 = 0$ capiamo immediatamente che l'unica tangente principale in S, l'origine, è la retta $W = 0$ e cioè la retta per l'origine di parametri direttori $(0, 1)$. La sua molteplicità d'intersezione con la curva in S è chiaramente 4, perché deve essere maggiore di tre (è una tangente principale in un punto triplo) e non può superare 4 che è il grado della curva.

Potevamo anche ragionare "al finito" nel piano affine originario; le rette proiettive per S in $P^2(\mathbb{C})$ sono: le rette affini $Y = k$, $k \in \mathbb{C}$, e la retta impropria. Le rette affini $Y = k$ hanno tutte una intersezione al finito e quindi, viste in $P^2(\mathbb{C})$ hanno tutte molteplicità d'intersezione 3 con $\mathcal{C}$ in S, come deve essere, visto che S è triplo. Nessuna di esse ha intersezione maggiore dell'ordine del punto singolare S; nessuna di esse è quindi tangente principale. Ne segue che l'unica tangente principale è necessariamente la retta impropria e che questa ha molteplicità d'intersezione 4 con la curva in S (ragionamento già fatto sopra).

5. L'Hessiana $\mathcal{H}$ ha equazione $\det(F_{i\,j}) = 0$ e un rapido calcolo mostra che essa è rappresentata dall' equazione $X_0^4 X_2^2 = 0$. I punti *semplici* che $\mathcal{C}$ ha in comune con $\mathcal{H}$ sono i punti di flesso di $\mathcal{C}$. Si verifica che il punto $F = [1, 0, 0]$ è l'unico punto di flesso di $\mathcal{C}$ (quindi l'origine è un punto di flesso per $\mathcal{C}_A$).

6. La tangente τ nell'origine è la retta $X_1 + X_2 = 0$ o equivalentemente, nelle coordinate affini (X, Y) (certamente valide intorno all'origine), la retta di equazione $X + Y = 0$. È chiaro che tale retta ha molteplicità d'intersezione 4 con la curva nell'origine: infatti

$$\alpha(t) = f(0 + t, 0 - t) = t^4$$

ha in $t = 0$ uno zero di molteplicità 4.