Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Soluzione dell' esercizio assegnato la mattina del 25/05.
Si consideri nel piano euclideo E^2, con riferimento standard fissato e coordinate cartesiane (x, y) la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy + 8(\sqrt{3} - 1)x - 8(\sqrt{3} + 1)y + 20 = 0$$

1. Determinare una conica euclidea canonica $\mathcal{D}$ ed un'isometria $\psi : E^2 \to E^2$ tali che $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$.
2. Disegnare schematicamente la conica $\mathcal{C}$. Disegnare la conica $\mathcal{D}$. Individuare un nuovo riferimento cartesiano nel quale la conica $\mathcal{C}$ abbia forma canonica. Riportate il nuovo riferimento nel vostro disegno.
3. Dall'analisi fatta in **1** segue che la conica è a centro: determinare esplicitamente l'equazione cartesiana della retta contenente i fuochi.
4. Stabilire se esiste una retta r in E^2 con la proprietà che la simmetria ortogonale rispetto a questa retta, ρ_r, trasformi $\mathcal{C}$ in se stessa. In caso affermativo determinare tale retta.

Soluzione.
La forma quadratica associata alla conica è

$$q(x, y) = 5x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy.$$

L'operatore simmetrico associato alla forma quadratica è L_A, con

$$A = \begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{vmatrix}$$

L_A, che denotiamo semplicemente A, ha autovalori $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 8$. Inoltre $V_A(4) = \mathbb{R}(\sqrt{3}/2, -1/2)$ e $V_A(8) = \mathbb{R}(1/2, \sqrt{3}/2)$. È importante notare che questa è una base *ortonormale* di autovettori e che quindi la matrice

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix}$$

è una matrice *ortogonale* [1]. Questa matrice ortogonale diagonalizza simultaneamente la forma quadratica e l'operatore L_A.
Consideriamo quindi il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}/2x' + 1/2y' \\ y = -1/2x' + \sqrt{3}/2y' \end{cases}.$$

Nelle nuove coordinate l'equazione della conica diventa [2]

$$4(x')^2 + 8(y')^2 + 16x' - 16y' + 20 = 0$$

che riscriviamo come $(x')^2 + 2(y')^2 + 4x' - 4y' + 5 = 0$. Consideriamo l'ulteriore cambio di coordinate definito da

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a_{10}}{a_{11}} \\ y' = y'' - \frac{a_{20}}{a_{22}} \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' - 1 \end{cases}.$$

[1] È la rotazione di $\pi/3$ in senso orario

[2] la parte quadratica è automatica

Riassumiamo i due cambiamenti di coordinate nel cambiamento di coordinate dato da

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}/2x'' + 1/2y'' + (1-2\sqrt{3})/2 \\ y = -1/2x'' + \sqrt{3}/2y'' + (2+\sqrt{3})/2 \end{cases} .$$

In queste nuove coordinate l'equazione assume la forma canonica metrica

$$(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1.$$

Trattasi, ovviamente, di un'ellisse reale.
Questo ragionamento fornisce anche il riferimento $O'\underline{f}_1\underline{f}_2$ nel quale la conica $\mathcal{C}$ ha equazione canonica: è il riferimento con centro in $O\prime = ((1-2\sqrt{3})/2, (2+\sqrt{3})/2)$ e con vettori della base uguali a $\underline{f}_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$, $\underline{f}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$.
Se $\mathcal{D}$ è la conica canonica euclidea di equazione

$$x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

e se ψ è l'isometria $T_{M,\underline{c}}$ con

$$M = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix}, \quad \underline{c} = ((1-2\sqrt{3})/2, (2+\sqrt{3})/2)$$

allora $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$
L'equazione cartesiana della retta contenente i fuochi di $\mathcal{C}$ è data dall'immagine dell'asse x tramite l'isometria ψ. L'asse x ha equazione parametrica $(t,0), t \in \mathbb{R}$ e quindi la retta contente i fuochi ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = (\sqrt{3}/2)t + (1-2\sqrt{3})/2 \\ y = (-1/2)t + (2+\sqrt{3})/2 \end{cases} .$$

L'equazione cartesiana è quindi

$$x + \sqrt{3}y - 1 = 0.$$

Questa è anche una retta r rispetto alla quale la conica $\mathcal{C}$ è simmetrica (infatti $\mathcal{D}$ è simmetrica rispetto all'asse x).
È ora semplice disegnare le coniche $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ ed il nuovo riferimento nel quale $\mathcal{C}$ è in forma canonica.