Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 8.
Consegna di un documento pdf entro il giorno 10/06, ore 23.59,
direttamente alla tutor Francesca Leonardi tramite email.

Esercizio 1.
Per una quadrica affine reale di matrice simmetrica $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e di matrice A_0 associata ai termini di grado 2, consideriamo

$$\mathrm{rg}(A)\,, \quad \mathrm{rg}(A_0) \quad \mathrm{segno}(\det A)\,, \quad |s|\,, \quad |s_0|$$

Qui abbiamo denotato con $|s|$ la segnatura di A a meno dell'ordine e similmente per $|s_0|$; il termine segno($\det A$) è per definizione uguale al segno del determinante di A se rgA $= 4$ ed è per definizione uguale a 0 se rgA < 4.
Facoltativo. Dimostrare che $\mathrm{rg}(A)\,, \mathrm{rg}(A_0)\,, \mathrm{segno}(\det A)\,, |s|\,, |s_0|$ sono invarianti affini. Suggerimento: calcolare esplicitamente la matrice $B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$ analoga a quella considerata per una conica nella sezione 31 di Sernesi. **Fine facoltativo.**
Calcolare gli invarianti affini

$$\mathrm{rg}(A)\,, \quad \mathrm{rg}(A_0) \quad \mathrm{segno}(\det A)\,, \quad |s|\,, \quad |s_0|$$

per le diciassette quadriche canoniche affini reali e verificare che essi le distinguono. Create una tabella con le 17 quadriche sulla riga superiore orizzontale e gli invariati affini nella colonna a sinistra.

Esercizio 2 . Piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Consideriamo le due rette $r : x_0 + x_1 = 0$ e $r' : x_0 - x_2 = 0$. Siano λ, μ coordinate omogenee di r nel sistema di riferimento che ha i punti $[0,0,1]$ e $[1,-1,0]$ come punti fondamentali e $[1,-1,2]$ come punto unità. Siano λ', μ' coordinate omogenee di r' nel sistema di riferimento che ha i punti $[0,1,0]$ e $[1,0,1]$ come punti fondamentali e $[2,3,2]$ come punto unità. Fissiamo il punto $P_0 = [1,0,0]$, che è esterno sia ad r che a r', e consideriamo l'applicazione

$$f : r \to r'$$

che associa a $P \in r$ il punto $P' = L(P_0, P) \cap r'$. Scrivere l'espressione di f nelle coordinate $[\lambda, \mu]$ e $[\lambda', \mu']$ verificando in particolare che trattasi di un isomorfismo di rette proiettive.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $P^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 + 2X_0^2X_2 + X_0X_2^2 + X_1^2X_2 = 0\,.$$

1. Verificare che $\mathcal{C}$ ha un unico punto singolare S e determinarlo.
2. Determinare l'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in $[1, 2i, 1]$.
Da **1** segue che il punto singolare $S \in P^2(\mathbb{C}) \setminus H_0 \equiv A^2(\mathbb{C})$.
3. Scrivere l'equazione affine di $\mathcal{C}_A := \mathcal{C} \cap (P^2(\mathbb{C}) \setminus H_0)$.
4. Studiare la natura di S dimostrando in particolare che trattasi di un nodo.
5. Determinare l'equazione cartesiana delle tangenti principali a $\mathcal{C}$ in S. (Suggerimento: può essere utile, ma non necessaria, una traslazione....)
6. Vero o Falso: una cubica singolare non può avere un punto triplo.
7. Vero o Falso: una cubica singolare può avere al più un punto doppio.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$f(X;Y) = XY^2 - Y^4 + X^3 - 2X^2Y = 0\,.$$

1. Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$ rispetto a X_0.
2. Stabilire se esistono asintoti.
3. Verificare che l'origine è punto singolare per $\mathcal{C}$; determinare le tangenti principali nell'origine, stabilendo quindi se essa è singolarità ordinaria o non-ordinaria.
4. Sia σ la retta di equazione $Y = 7$. Calcolare $\sum_{P\in\sigma} I(\mathcal{C}, \sigma; P)$.
5. Sia $P = (4, -4)$ e sia r la retta di equazione $2X + 3Y + 4 = 0$. Determinare $I(\mathcal{C}, r; P)$.