Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 8. Soluzioni.

A cura di Francesca Leonardi e Paolo Piazza.

Esercizio 1.
Per una quadrica affine reale di matrice simmetrica $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e di matrice A_0 associata ai termini di grado 2, consideriamo

$$\mathrm{rg}(A)\,, \quad \mathrm{rg}(A_0) \quad \mathrm{segno}(\det A)\,, \quad |s|\,, \quad |s_0|$$

Qui abbiamo denotato con $|s|$ la segnatura di A a meno dell'ordine e similmente per $|s_0|$; il termine segno$(\det A)$ è per definizione uguale al segno del determinante di A se rgA $= 4$ ed è per definizione uguale a 0 se rgA < 4.
Facoltativo. Dimostrare che $\mathrm{rg}(A)\,, \mathrm{rg}(A_0)\,, \mathrm{segno}(\det A)\,, |s|\,, |s_0|$ sono invarianti affini. Suggerimento: calcolare esplicitamente la matrice $B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$ analoga a quella considerata per una conica nella sezione 31 di Sernesi. **Fine facoltativo.**
Calcolare gli invarianti affini

$$\mathrm{rg}(A)\,, \quad \mathrm{rg}(A_0) \quad \mathrm{segno}(\det A)\,, \quad |s|\,, \quad |s_0|$$

per le diciassette quadriche canoniche affini reali e verificare che essi le distinguono. Create una tabella con le 17 quadriche sulla riga superiore orizzontale e gli invariati affini nella colonna a sinistra.

Soluzione.
Procediamo come per le coniche. Siano A e B le matrici 4×4 associate a due quadriche affinemente equivalenti $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ con $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$ e ϕ l'affinità di equazioni

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Se

$$\widetilde{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ c_3 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

allora $B = \widetilde{M}^T A \widetilde{M}$ e $B_0 = M^T A_0 M$. Ne segue che A e B sono congruenti e lo stesso è vero per A_0 e B_0. Da ciò segue immediatemente (si veda il caso delle coniche) che $\mathrm{rg}(A)\,, \mathrm{rg}(A_0)\,, |s|\,, |s_0|$ sono invarianti affini.
Infine, il segno del determinante di A è un invariante affine perché per il teorema di Binet:

$$\det(B) = \det(\widetilde{M}^t)\det(A)\det(\widetilde{M}) = \det(\widetilde{M})^2\det(A).$$

Dato che $\widetilde{M} \in GL_4(\mathbb{K})$ abbiamo che $\det(\widetilde{M})^2 > 0$, dunque segno$(\det A) =$ segno$(\det B)$.
La tabella richiesta si ottiene per calcolo diretto, analogo a quanto fatto nell'esercizio 3, foglio 7.

Esercizio 2 . Piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Consideriamo le due rette $r : x_0 + x_1 = 0$ e $r' : x_0 - x_2 = 0$. Siano λ, μ coordinate omogenee di r nel sistema di riferimento che ha i punti $[0, 0, 1]$ e $[1, -1, 0]$ come punti fondamentali e $[1, -1, 2]$ come punto unità. Siano λ', μ' coordinate omogenee di r' nel sistema di riferimento che ha i punti $[0,1,0]$ e $[1,0,1]$ come punti fondamentali e $[2,3,2]$ come punto unità. Fissiamo il punto $P_0 = [1,0,0]$, che è esterno sia ad r che a r', e consideriamo l'applicazione

$$\pi_{P_0} : r \to r'$$

che associa a $P \in r$ il punto $P' = L(P_0, P) \cap r'$. Scrivere l'espressione di π_{P_0} nelle coordinate $[\lambda, \mu]$ e $[\lambda', \mu']$ verificando in particolare che trattasi di un isomorfismo di rette proiettive.

Soluzione.

Sia P il generico punto di r, di coordinate λ, μ nel riferimento fissato. Determiniamo prima di tutto le coordinate di $P^2(\mathbb{R})$ di P. Consideriamo i vettori $\mathbf{v}_0 = (1,-1,2)$, $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0)$ di $\mathbb{R}^3$ dove vi ricordo che $(1,-1,2)$ corrisponde al punto unità. Poichè $\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, segue che dobbiamo normalizzare $\mathbf{v}_1$ moltiplicandolo per 2 (mentre lasciamo $\mathbf{v}_2$ invariato). Ne segue che P ha coordinate

$$\lambda[0,0,2] + \mu[1,-1,0] = [\mu, -\mu, 2\lambda].$$

L'equazione di $L(P_0, P)$ è data da

$$\begin{vmatrix} \mu & -\mu & 2\lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 2\lambda x_1 + \mu x_2 = 0.$$

È facile vedere che

$$\pi_{P_0}(P) = L(P_0, P) \cap r' = [2\lambda, -\mu, 2\lambda].$$

Per finire dobbiamo determinare le coordinate λ', μ' di $\pi_{P_0}(P)$. Ragioniamo come prima: consideriamo i vettori $\mathbf{v}'_0 = (2,3,2)$, $\mathbf{v}'_1 = (0,1,0)$, $\mathbf{v}'_2 = (1,0,1)$ di $\mathbb{R}^3$ dove vi ricordo che $\mathbf{v}'_0 = (2,3,2)$ corrisponde al punto unità. Poichè $\mathbf{v}'_0 = 3\mathbf{v}'_1 + 2\mathbf{v}'_2$, segue che dobbiamo normalizzare i vettori $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ moltiplicandoli rispettivamente per 3 e 2. Quindi un punto generico di r', di coordinate λ' μ' nel riferimento fissato ha coordinate

$$\lambda'[0,3,0] + \mu'[2,0,2] = [2\mu', 3\lambda', 2\mu']$$

in $P^2(\mathbb{R})$. Quindi il punto $\pi_{P_0}(P) = [2\lambda, -\mu, 2\lambda]$ ha su r' coordinate $[\lambda', \mu'] = [-\frac{\mu}{3}, \lambda] = [-\mu, 3\lambda]$. Concludiamo che le equazioni richieste sono date da

$$\pi_{P_0}(P[\lambda, \mu]) = [-\mu, 3\lambda].$$

L'applicazione π_{P_0} è dunque biiettiva (è indotta da una matrice invertibile, la matrice $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$) ed è un isomorfismo di rette proiettive.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $P^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 + 2X_0^2X_2 + X_0X_2^2 + X_1^2X_2 = 0\,.$$

1. Verificare che $\mathcal{C}$ ha un unico punto singolare S e determinarlo.
2. Determinare l'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in $[1, 2i, 1]$.
Da **1** segue che il punto singolare $S \in P^2(\mathbb{C}) \setminus H_0 \equiv A^2(\mathbb{C})$.
3. Scrivere l'equazione affine di $\mathcal{C}_A := \mathcal{C} \cap (P^2(\mathbb{C}) \setminus H_0)$.
4. Studiare la natura di S dimostrando in particolare che trattasi di un nodo.
5. Determinare l'equazione cartesiana delle tangenti principali a $\mathcal{C}$ in S. (Suggerimento: può essere utile, ma non necessaria, una traslazione....)

6. Vero o Falso: una cubica singolare non può avere un punto triplo.
7. Vero o Falso: una cubica singolare può avere al più un punto doppio.
Soluzione.
I punti singolari di $\mathcal{C}$ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} F_0(X_0,X_1,X_2) = 3X_0^2 + 4X_0X_2 + X_2^2 = 0 \\ F_1(X_0,X_1,X_2) = 2X_1X_2 = 0 \\ F_2(X_0,X_1,X_2) = 2X_0^2 + 2X_0X_2 + X_1^2 = 0 \end{cases}$$

con $F_j := F_{X_j}$, ed è facile vedere che $[1,0,-1]$ è l'unica soluzione.
La retta tangente in $[1,2i,1]$ ha equazione cartesiana

$$F_0(1,2i,1)X_0 + F_1(1,2i,1)X_1 + F_2(1,2i,1)X_2 = 0$$

e cioè $8X_0+4iX_1 = 0$. L'equazione affine di C^* è $f(X,Y) = 1+2Y+Y^2+X^2Y = 0$ ed il punto singolare S è il punto di coordinate $(0,-1)$. Per studiare le proprietà locali della curva in S scriviamo $f(X,Y) \equiv f(X,(Y-(-1))+(-1))$ che ci dà $1+2((Y+1)-1)+((Y+1)-1)^2+X^2((Y+1)-1)$ che riscriviamo come

$$(Y+1)^2 + X^2(Y+1) - X^2 = 0$$

(Questo è un metodo generale, spiegato in Sernesi, p. 415: per determinare lo sviluppo di Taylor di un polinomio $g(X,Y)$ in un punto (α,β) scriviamo $g(X,Y) = g((X-\alpha)+\alpha,(Y-\beta)+\beta))$ e sviluppiamo.)
Poniamo ora $X' = X$ e $Y' = Y+1$; nelle nuove coordinate la curva $\mathcal{C}$ ha equazione

$$(Y')^2 + (X')^2Y' - (X')^2 = 0$$

ed il punto S diventa l'origine. Dall'equazione appena scritta capiamo immediatamente che S è un nodo, con tangenti principali le rette τ_1,τ_2 di equazione cartesiana

$$\tau_1 : Y' - X' = 0\,, \quad \tau_2 : Y' + X' = 0$$

La conclusione è che S è un nodo con tangenti principali, nel riferimento canonico,

$$\tau_1 : Y + 1 - X = 0\,, \quad \tau_2 : Y + 1 + X = 0$$

Ovviamente era anche possibile fare un'analisi diretta, senza traslazione. Vediamo come.
Calcolando le derivate parziali del polinomio $f(X,Y)$ otteniamo che S è un punto doppio (infatti $f_X(0,-1) = f_Y(0,-1) = 0$, ma $f_{XX}(0,-1) \neq 0$). Le derivate seconde miste del polinomio sono

$$f_{XX}(0,-1) = -2; \qquad f_{XY}(0,-1) = 0; \qquad f_{YY}(0,-1) = 2.$$

Sappiamo dalla teoria che le tangenti principali hanno direzione (L,M), tali che

$$f_{XX}(0,-1)L^2 + 2f_{XY}(0,-1)LM + f_{YY}(0,-1)M^2 = 0$$

da cui segue che le tangenti in S hanno vettori direttori $(1,\pm 1)$. Imponendo il passaggio per S otteniamo nuovamente le equazioni delle tangenti principali:

$$\tau_1 \ : \ X - Y - 1 = 0; \qquad \tau_2 \ : \ X + Y + 1 = 0\,.$$

È **falso** che una cubica singolare non possa avere un punto triplo; ad esempio tre rette incidenti in un punto P definiscono una cubica singolare con un punto triplo in P.
È **falso** che una cubica singolare possa avere al più un punto doppio: infatti $\mathcal{C} = r_1 \cup r_2 \cup r_3$ con r_j rette proiettive non appartenenti allo stesso fascio ha tre punti doppi (le tre intersezioni delle rette). Analogamente, una cubica riducibile in una

conica e in una retta non tangente alla conica ha due punti doppi. (In generale, sia $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$, con $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ irriducibili; allora ogni punto comune a $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ è un punto singolare per $\mathcal{C}$; per verificarlo basta applicare la regola di derivazione dei prodotti.)

Esercizio 4. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$f(X;Y) = XY^2 - Y^4 + X^3 - 2X^2Y = 0\,.$$

1. Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$ rispetto a X_0.
2. Stabilire se esistono asintoti.
3. Verificare che l'origine è punto singolare per $\mathcal{C}$; determinare le tangenti principali nell'origine, stabilendo quindi se essa è singolarità ordinaria o non-ordinaria.
4. Sia σ la retta di equazione $Y = 7$. Calcolare $\sum_{P\in\sigma} I(\mathcal{C},\sigma;P)$.
5. sia $P = (4,-4)$ e sia r la retta di equazione $2X + 3Y + 4 = 0$. Determinare $I(\mathcal{C}, r; P)$.

Soluzione.
1. La chiusura proiettiva $\mathcal{C}^*$ di $\mathcal{C}$ è la curva algebrica proiettiva definita dall'omogenizzato (rispetto a X_0) del polinomio f. L'omogenizzato è il polinomio

$$F(X_0,X_1,X_2) = X_0^4 f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0})$$

e cioè il polinomio $F(X_0,X_1,X_2) = X_0X_1(X_2)^2 - (X_2)^4 + X_0(X_1)^3 - 2X_0(X_1)^2X_2$. I punti comuni a $\mathcal{C}^*$ e alla retta impropria H_0 sono per definizione i punti impropri di $\mathcal{C}$. Mettendo a sistema l'equazione di $\mathcal{C}^*$ e l'equazione di H_0, $X_0 = 0$, otteniamo un unico punto P_∞ di coordinate $[0,1,0]$.
2. È subito visto che P_∞ è un punto semplice per $\mathcal{C}^*$ perché $F_{X_0}(0,1,0) = 1 \neq 0$. È quindi ben definita la tangente τ^* a $\mathcal{C}^*$ in P_∞; se questa retta è la chiusura proiettiva di una retta affine τ, allora τ è un asintoto per $\mathcal{C}$. La retta tangente ha equazione

$$F_{X_0}(0,1,0)X_0 + F_{X_1}(0,1,0)X_1 + F_{X_2}(0,1,0)X_2 = 0$$

Si ha $F_{X_1}(0,1,0) = 0 = F_{X_2}(0,1,0)$ e quindi la tangente a $\mathcal{C}^*$ in P_∞ è la retta impropria $X_0 = 0$. Ne segue che non esistono asintoti.
3. Il polinomio $f(X,Y)$ può essere scritto come

$$f(X,Y) = F_3(X,Y) + F_4(X,Y)$$

con F_j omogeneo di grado j. Ne segue che in $f(X,Y)$ i termini di grado 0, grado 1 e grado 2 sono tutti nulli, mentre non è nullo il termine di grado 3. Dato che i coefficienti di F_j sono a meno di costanti le derivate j-me calcolate in $(0,0)$ (verificatelo !) vediamo che $(0,0)$ è triplo, perché in $(0,0)$ sono nulle tutte le derivate parziali fino all'ordine 2 compreso ma esiste una derivata di ordine 3 non-nulla.
Le tangenti principali sono le rette per $(0,0)$ i cui parametri direttori soddisfano $F_3(L,M) = 0$. Quindi i parametri direttori delle tangenti principali soddisfano l'equazione $LM^2 + L^3 - 2L^2M = 0$ che possiamo riscrivere come $L(M-L)^2 = 0$, Quindi le tangenti principali sono le rette

$$X = 0 \qquad \text{e} \qquad X - Y = 0$$

Dato che esse sono in numero di 2 e dato che $(0,0)$ è triplo, possiamo affermare che $(0,0)$ è un punto triplo non-ordinario.
4. La retta $Y = 7$ ha $P_\infty = [0,1,0]$ come punto all'infinito. D'altra parte P_∞ è un punto della chiusura proiettiva $\mathcal{C}^*$ ed è semplice, quindi ogni retta per P_∞, con l'esclusione della retta tangente, ha intersezione di molteplicità 1 con $\mathcal{C}^*$ in P_∞.

Sappiamo che la tangente a $\mathcal{C}^*$ in P_∞ è la retta impropria, che non è uguale alla retta σ^*, quindi $I(\mathcal{C}^*, \sigma^*; P_\infty) = 1$. Utilizzando la teoria vediamo quindi che

$$\sum_{P\in\sigma} I(\mathcal{C}, \sigma; P) = \sum_{P\in\sigma^*} I(\mathcal{C}^*, \sigma^*; P) - I(\mathcal{C}^*, \sigma^*; P_\infty) = 4 - 1 = 3$$

5. Un semplice calcolo mostra che $P = (4, -4)$ verifica l'equazione della curva $\mathcal{C}$: $f(4, -4) = 0$. Un altro semplice conto dimostra che $P = (4, -4)$ è semplice. Quindi ogni retta per $(4, -4)$, con l'esclusione della tangente, ha molteplicità d'intersezione 1 con la curva $\mathcal{C}$ in $(4, -4)$. Facendo i conti scopriamo però che la retta r è proprio la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $P = (4, -4)$. Quindi $I(\mathcal{C}, r; P) \geq 2$ (attenzione: P potrebbe essere un flesso, per questa ragione possiamo solo affermare, per il momento, che $I(\mathcal{C}, r; P) \geq 2$)). Di fatto $(4, -4)$ *non* è un flesso e quindi

$$I(\mathcal{C}, r; P) = 2\,.$$

Per giustificare l'ultima affermazione possiamo calcolare i parametri direttori della retta r, che sono $(3, -2)$, e studiare il polinomio

$$\alpha(t) = f(4 + t3, -4 + t(-2))$$

Non è difficile verificare che questo polinomio inizia con t^2 e quindi, per definizione, $2 = I(\mathcal{C}, r; P)$ (d'altra parte, questa era precisamente la domanda dell'esercizio).