Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 7.
Consegna di un documento pdf entro il giorno 30/05, ore 23.59,
direttamente alla tutor Francesca Leonardi tramite email.

Esercizio 1. Consideriamo il piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ e le quaterne di punti

$$P_0[0,0,1]\,,\quad P_1[0,1,-1]\,,\quad P_2[1,-1,0]\,,\quad P_4[1,1,-3]$$

e

$$Q_0[1,0,0]\,,\quad Q_1[1,0,-1]\,,\quad Q_2[0,1,-1]\,,\quad Q_4[0,1,1]$$

Stabilire se esiste una proiettività $f: P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(P_j) = Q\,,\quad j = 0,1,2,3$$

ed in caso affermativo determinarla esplicitamente.

Esercizio 2. Spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane x, y, z. Si consideri il luogo $\mathcal{Q}$ dei punti di E^3 le cui coordinate soddisfano

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

1. Verificare che $\mathcal{Q}$ è una sfera [1] determinandone il centro e il raggio.
Suggerimento: quale è l'equazione della sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio R?
2. Verificare che il piano π di equazione

$$x + y - z = 3$$

è secante $\mathcal{Q}$, $\pi \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, e determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta intersecando $\mathcal{Q}$ con π.

Esercizio 3.
Per una conica affine reale di matrice simmetrica $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e di matrice A_0 associata ai termini di grado 2, consideriamo

$$\mathrm{rg}(A)\,,\quad \mathrm{rg}(A_0)\quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,,\quad |s|\,,\quad |s_0|$$

Qui abbiamo denotato con $|s|$ la segnatura di A a meno dell'ordine e similmente per $|s_0|$; il segno del determinante di A_0 è per definizione 0 quando il rango di A_0 non è 2.
Facoltativo. Dimostrare che $\mathrm{rg}(A)\,,\quad \mathrm{rg}(A_0)\quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,,\quad |s|\,,\quad |s_0|$ sono invarianti affini. Suggerimento: calcolare esplicitamente la matrice $B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$ nella sezione 31 di Sernesi. **Fine facoltativo.**
Calcolare gli invarianti affini

$$\mathrm{rg}(A)\,,\quad \mathrm{rg}(A_0)\quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,,\quad |s|\,,\quad |s_0|$$

per le nove coniche canoniche affini reali e verificare che essi le distinguono. Create una tabella con le 9 coniche sulla riga superiore orizzontale e gli invariati affini nella colonna a sinistra. (Notate che Sernesi non usa $|s|$ e $|s_0|$ ma, invece, l'informazione sul supporto e più precisamente se esso è vuoto o non-vuoto (il supporto di una conica è un invariate affine).)

---

[1] con ciò si intende una *superficie sferica*

Esercizio 4. Piano proiettivo reale numerico $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. È data la conica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione

$$3X_0^2 - 10X_0X_2 + 2X_1^2 + 3X_2^2 = 0$$

1. Scrivere la matrice A associata a $\mathcal{C}$ e dedurne il tipo proiettivo di $\mathcal{C}$ scrivendo anche l'equazione canonica proiettiva reale.
2. Siano $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ le coniche affini ottenute disomogenizzando rispetto a X_0, X_1, X_2 rispettivamente. Utilizzando, ad esempio, l'esercizio precedente determinare il tipo affine di ognuna delle tre coniche $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

Esercizio 5. Retta proiettiva $P^1(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1. Siano dati i punti p_1, p_2, p_3, p_4 con

$$p_1 = [1,0] \qquad p_2 = [3,4] \qquad p_3 = [2,1] \qquad p_4 = [4,5].$$

1. Stabilire se esiste una proiettività $f : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(p_1) = p_2 \qquad f(p_2) = p_1 \qquad f(p_3) = p_4 \qquad f(p_4) = p_3$$

2. Stabilire se esiste una proiettività $g : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ tale che

$$g(p_1) = p_2 \qquad g(p_2) = p_3 \qquad g(p_3) = p_4 \qquad g(p_4) = p_1.$$

Esercizio 6. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate x, y, z. Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$-2xy + z^2 = 1.$$

6.1. Determinare il tipo di quadrica, verificando in particolare che è rigata.
6.2. Determinare le equazioni cartesiane delle due schiere di rette di $\mathcal{Q}$.
Suggerimento. Per **6.2.** non serve usare la forma canonica di $\mathcal{Q}$: basta guardare l'equazione che la definisce.
6.3. Trovare le rette delle schiere passanti per il punto $(0,0,1)$.
6.4. Dimostrare che esiste una retta r dello spazio tale che i piani ortogonali ad r intersecano $\mathcal{Q}$ in circonferenze. Trovare equazioni cartesiane nelle coordinate x, y, z di r e dei piani che tagliano $\mathcal{Q}$ in una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.