Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 7. Soluzioni
a cura di Francesca Leonardi e Paolo Piazza

Esercizio 1. Consideriamo il piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ e le quaterne di punti

$$P_0[0,0,1]\,,\quad P_1[0,1,-1]\,,\quad P_2[1,-1,0]\,,\quad P_4[1,1,-3]$$

e

$$Q_0[1,0,0]\,,\quad Q_1[1,0,-1]\,,\quad Q_2[0,1,-1]\,,\quad Q_4[0,1,1]$$

Stabilire se esiste una proiettività $f : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(P_j) = Q\,,\quad j = 0,1,2,3$$

ed in caso affermativo determinarla esplicitamente.

Soluzione.
È facile verificare che le due quaterne sono in posizione generale ed esiste quindi unica la proiettività f che muta la prima quaterna nella seconda. Per determinare f leggiamo con cura la Proposizione 27.4 in Sernesi. Determiniamo allora $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tali che $\lambda_0(0,0,1) + \lambda_1(0,1,-1) + \lambda_2(1,-1,0) = (1,1,-3)$. (Si dice che i punti sono stati normalizzati.) È subito visto che $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Analogamente $2(1,0,0) + (-2)(1,0,-1) + 1(0,1,-1) = (0,1,1)$ Quindi, sulla base della Prop. 27.4, possiamo affermare che la proiettività f è la classe in $PGL(3,\mathbb{R})$ della matrice A associata nella base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che porta la base $\mathcal{V} = \{(0,0,-1),(0,2,-2),(1,-1,0)\}$ nella base $\mathcal{W} = \{(2,0,0),(-2,0,2),(0,1,-1)\}$. Quindi $A = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$. Ora, ovviamente, per definizione stessa di matrice associata ad un'applicazione lineare con base di partenza $\mathcal{V}$ e base di arrivo $\mathcal{W}$ si ha, per questa T: $M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(T) = I_3$ e quindi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = M_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(T) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$$

e quindi, in definitiva,

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = M_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(\mathrm{Id}) \cdot (M_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{Id}))^{-1}$$

Facendo i conti si ottiene

$$A = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. Spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane x, y, z. Si consideri il luogo $\mathcal{Q}$ dei punti di E^3 le cui coordinate soddisfano

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

1. Verificare che $\mathcal{Q}$ è una sfera [1] determinandone il centro e il raggio.
Suggerimento: quale è l'equazione della sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio R?
2. Verificare che il piano π di equazione

$$x + y - z = 3$$

è secante $\mathcal{Q}$, $\pi \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, e determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta intersecando $\mathcal{Q}$ con π.

[1] con ciò si intende una *superficie sferica*

Soluzione. La superficie sferica (brevemente, la sfera) di raggio r e centro (x_0, y_0, z_0) è il luogo dei punti di E^3 le cui coordinate (x, y, z) soddisfano

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \,.$$

Osserviamo che $\mathcal{Q}$ ha un'equazione che non coinvolge termini misti di secondo grado; inoltre i termini di secondo grado sono nella forma $x^2 + y^2 + z^2$. Aggiungiamo e togliamo costanti in modo tale da far apparire dei quadrati di binomi:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 4z + 4) + (5 - 1 - 1 - 4) = 0,$$

quindi $\mathcal{Q}$ ha equazione

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 - 1 = 0.$$

Quindi $\mathcal{Q}$ è la sfera di centro $(1, 1, -2)$ e raggio 1. La distanza del piano π dal centro della sfera è minore di 1; lo calcoliamo calcolando la distanza α del centro dal punto d'intersezione, I, di π con la retta per il centro ortogonale al piano (c'è anche una formula che possiamo utilizzare ma vogliamo procedere in maniera diretta). Dall'equazione cartesiana del piano otteniamo che le rette ortogonali ad esso hanno direzione $(1, 1, -1)$. Imponendo il passaggio per il centro della circonferenza $(1, 1, -2)$ troviamo le equazioni parametriche della retta:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 2 \end{cases} .$$

Sostituendo queste espressioni dell'equazione cartesiana di π troviamo il valore di t che corrisponder sulla retta al punto I:

$$(t + 1) + (t + 1) - (-t - 2) = 3 \implies t = -\frac{1}{3} \implies I = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

La distanza tra il centro della circonferenza è quindi pari a

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3} \,.$$

Quindi il piano è secante. Il centro della circonferenza $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \pi$ è proprio il punto I. Il raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \pi$ è ottenuto applicando il teorema di Pitagora: detto R il raggio della sfera e r il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$:

$$R^2 = d^2 + r^2 \implies r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Esercizio 3.
Per una conica affine reale di matrice simmetrica $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e di matrice A_0 associata ai termini di grado 2, consideriamo

$$\mathrm{rg}(A)\,, \quad \mathrm{rg}(A_0) \quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,, \quad |s|\,, \quad |s_0|$$

Qui abbiamo denotato con $|s|$ la segnatura di A a meno dell'ordine e similmente per $|s_0|$; il segno del determinante di A_0 è per definizione 0 quando il rango di A_0 non è 2.

Facoltativo. Dimostrare che $\mathrm{rg}(A)\,, \quad \mathrm{rg}(A_0) \quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,, \quad |s|\,, \quad |s_0|$ sono invarianti affini. Suggerimento: calcolare esplicitamente la matrice $B = \widetilde{M}^t A \widetilde{M}$

nella sezione 31 di Sernesi. **Fine facoltativo.**
Calcolare gli invarianti affini

$$\mathrm{rg}(A)\,,\quad \mathrm{rg}(A_0)\quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,,\quad |s|\,,\quad |s_0|$$

per le nove coniche canoniche affini reali e verificare che essi le distinguono. Create una tabella con le 9 coniche sulla riga superiore orizzontale e gli invariati affini nella colonna a sinistra. (Notate che Sernesi non usa $|s|$ e $|s_0|$ ma, invece, l'informazione sul supporto e più precisamente se esso è vuoto o non-vuoto (il supporto di una conica è un invariate affine).)

Soluzione. Dimostriamo che $\mathrm{rg}(\mathcal{C})\,,\quad \mathrm{rg}(A_0)\quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,,\quad |s|\,,\quad |s_0|$ sono invarianti affini.
Sia A la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ nelle coordinate (X,Y), $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ l'affinità:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

con $M \in GL_2(\mathbb{R})$. Sia B la matrice associata alla conica $\mathcal{D}$ tale che $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$. Sappiamo (Sernesi, p. 377) che:

$$B = \widetilde{M}^T A \widetilde{M}$$

dove

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Ovviamente la matrice $\widetilde{M}$ ha determinante diverso da zero, dunque $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ perché matrici congruenti hanno lo stesso rango.
Analogamente le matrici A_0 e B_0 sono congruenti: infatti si verifica immediatamente che

$$B_0 = M^T A_0 M$$

e sappiamo che $M \in GL_2(\mathbb{R})$. Pertanto anche $\mathrm{rg}(A_0) = \mathrm{rg}(B_0)$.
Scriviamo il determinante di B_0 utilizzando il teorema di Binet:

$$\det B_0 = \det M^T \det A_0 \det M = (\det M)^2 \det A_0.$$

Siccome M è invertibile, $(\det M)^2 > 0$, da cui segue che $\mathrm{segno}(\det A_0) = \mathrm{segno}(\det B_0)$.
Il fatto che la segnatura di A e che la segnatura di A_0 siano invarianti affini (a meno dell'ordine)[2] segue direttamente dal fatto che la segnatura è un invariante per congruenza delle matrici simmetriche (Sernesi, p. 226). Rivediamo l'argomento, direttamente nel caso in esame. Dal teorema di Sylvester esistono uniche matrici S_A e S_B, matrici di Sylvester associate rispettivamente a A e B, tali cioè che:

$$A = C^T S_A C$$
$$B = D^T S_B D$$

con $C, D \in GL_3(\mathbb{R})$ Usiamo ora che $B = \widetilde{M}^T A \widetilde{M}$, pertanto:

$$D^T S_B D = B = \widetilde{M}^T A \widetilde{M} = \widetilde{M}^T C^T S_A C \widetilde{M}.$$

[2] Dobbiamo prendere la segnatura a meno dell'ordine perché l'equazione della conica è determinata a meno di una costante non nulla; in particolare potremmo moltiplicare l'equazione per (-1).

Equazione	Matrice (A)	$\mathrm{rg}(A)$	$\mathrm{rg}(A_0)$	segno$(\det A_0)$	$\lvert s\rvert$	$\lvert s_0\rvert$
$x^2+y^2=1$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	3	2	+	$(2,1)$	$(2,0)$
$x^2+y^2+1=0$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	3	2	+	$(3,0)$	$(2,0)$
$x^2+y^2=0$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	2	2	0	$(2,0)$	$(2,0)$
$x^2-y^2-1=0$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	3	2	-	$(1,2)$	$(1,1)$
$x^2-y^2=0$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	2	2	-	$(1,1)$	$(1,1)$
$y^2-x=1$	$\begin{pmatrix}0&-1/2&0\\-1/2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	2	1	0	$(2,1)$	$(1,0)$
$y^2-1=0$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	2	1	0	$(1,1)$	$(1,0)$
$y^2+1=0$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	2	1	0	$(2,0)$	$(1,0)$
$y^2=0$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	1	1	0	$(1,0)$	$(1,0)$

Ponendo $N = C\widetilde{M}$ otteniamo che $N \in GL_3(\mathbb{R})$ e $B = N^T S_A N$, pertanto S_A e anche la matrice di Sylvester di B. Dall'unicità della matrice di Sylvester segue che $S_A = S_B$, per cui anche le segnature sono uguali.
Scrivendo le matrici associate alle nove coniche a meno di affinità otteniamo per calcolo diretto i risultati che abbiamo rappresentato in tabella.

Esercizio 4. Piano proiettivo reale numerico $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. È data la conica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione

$$3X_0^2 - 10X_0X_2 + 2X_1^2 + 3X_2^2 = 0$$

1. Scrivere la matrice A associata a $\mathcal{C}$ e dedurne il tipo proiettivo di $\mathcal{C}$ scrivendo anche l'equazione canonica proiettiva reale.
2. Siano $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ le coniche affini ottenute disomogenizzando rispetto a X_0, X_1, X_2 rispettivamente. Utilizzando, ad esempio, l'esercizio precedente determinare il tipo affine di ognuna delle tre coniche $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

Soluzione.
1. La matrice associata a questa conica proiettiva è :

$$A := \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

calcolando il polinomio caratteristico di A ed applicando il criterio di Cartesio ed il teorema di Sylvester otteniamo che A è congruente alla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che la conica è proiettivamente equivalente alla conica di equazione canonica $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$.
2. $\mathcal{C}_0$ ha equazione $3 - 10Y + 2X^2 + 3Y^2 = 0$ nel piano affine $P^2(\mathbb{R}) \setminus H_0$. $\mathcal{C}_1$ ha equazione $2 - 10YX + 3X^2 + 3Y^2 = 0$ nel piano affine $P^2(\mathbb{R}) \setminus H_1$. $\mathcal{C}_2$ ha equazione $3 - 10X + 2Y^2 + 3X^2 = 0$ nel piano affine $P^2(\mathbb{R}) \setminus H_2$. Calcolando gli invarianti affini e confrontandoli con la tabella ottenuta svolgendo l'esercizio precedente troviamo che $\mathcal{C}_0$ è un'ellisse a punti reali, $\mathcal{C}_1$ è un'iperbole non degenere e $\mathcal{C}_2$ è un'ellisse a punti reali.

Esercizio 5. Retta proiettiva $P^1(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1. Siano dati i punti p_1, p_2, p_3, p_4 con

$$p_1 = [1, 0] \qquad p_2 = [3, 4] \qquad p_3 = [2, 1] \qquad p_4 = [4, 5].$$

1. Stabilire se esiste una proiettività $f : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(p_1) = p_2 \qquad f(p_2) = p_1 \qquad f(p_3) = p_4 \qquad f(p_4) = p_3$$

2. Stabilire se esiste una proiettività $g : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ tale che

$$g(p_1) = p_2 \qquad g(p_2) = p_3 \qquad g(p_3) = p_4 \qquad g(p_4) = p_1.$$

Soluzione.

1. Si verifica dalla definizione di birapporto che

$$\beta(p_1, p_2, p_3, p_4) = \beta(p_2, p_1, p_4, p_3) = 25$$

Questo garantisce che esiste una unica proiettività che trasforma p_1, p_2, p_3, p_4 ordinatamente in p_2, p_1, p_4, p_3.

Non era richiesto, ma determiniamo comunque questa proiettività, applicando una variante alla soluzione dell'esercizio 1. La proiettività f è esprimibile tramite un elemento di $PGL(2, \mathbb{R})$, e cioè una matrice 2×2 a meno di scalari non nulli che scriviamo come

$$\left[\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right].$$

Si tratta di determinare a, b, c, d. Dalla teoria sappiamo che esiste un'unica proiettività che trasforma p_1, p_2, p_3 ordinatamente in p_2, p_1, p_4 e che dalla condizione $\beta(p_1, p_2, p_3, p_4) = \beta(p_2, p_1, p_4, p_3)$ segue poi, necessariamente, $f(p_4) = p_3$. Possiamo quindi tralasciare quest'ultima condizione e cercare la proiettività f che trasforma p_1, p_2, p_3 ordinatamente in p_2, p_1, p_4. Abbiamo già risolto questo tipo d'esercizio all'inizio di queste soluzioni. Ecco una variante.

Osserviamo che $f = \alpha \circ \beta^{-1}$ dove β è la proiettività che trasforma i punti fondamentali del riferimento canonico in p_1, p_2, p_3 ed α è la proiettività che trasforma i punti fondamentali del riferimento canonico in p_2, p_1, p_4. Seguendo la dimostrazione della Proposizione 27.4 sappiamo che per determinare α e β dobbiamo normalizzare i rappresentanti dei punti. Si ha:

$$\frac{5}{4}(1,0) + \frac{1}{4}(3,4) = (2,1)$$

Scegliamo quindi

$$\mathbf{f}_0 = (\frac{5}{4}, 0)\,, \quad \mathbf{f}_1 = (\frac{3}{4}, 1)\,.$$

Nella base standard l'applicazione lineare che trasforma la base standard nella base $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1\}$ ha matrice

$$\begin{vmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Quindi

$$\beta = \left[\begin{vmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right].$$

Si ha:

$$\left(\begin{vmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che

$$\beta^{-1} = \left[\begin{vmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right].$$

Analogamente si procede per α. Otteniamo infine

$$f = \left[\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right].$$

2. Calcoliamo i birapporti: $\beta(p_1, p_2, p_3, p_4) = 25$; $\beta(p_2, p_3, p_4, p_1) = -24$. Siccome questi valori sono diversi per il teorema sul birapporto non può esistere una proiettività che porta la prima quaterna (ordinata) nella seconda.

Esercizio 6. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate x, y, z. Si consideri la quadrica Σ di equazione

$$-2xy + z^2 = 1.$$

6.1. Determinare il tipo di quadrica, verificando in particolare che è rigata.
6.2. Determinare le equazioni cartesiane delle due schiere di rette di Σ.
Suggerimento. Per **6.2.** non serve usare la forma canonica di Σ: basta guardare l'equazione che la definisce.
6.3. Trovare le rette delle schiere passanti per il punto $(0, 0, 1)$.
6.4. Dimostrare che esiste una retta r dello spazio tale che i piani ortogonali ad r intersecano Σ in circonferenze. Trovare equazioni cartesiane nelle coordinate x, y, z di r e dei piani che tagliano Σ in una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

Soluzione.

6.1. La matrice associata alla quadrica è

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Poichè $\det A \neq 0$, allora Σ è non degenere. Consideriamo la forma quadratica $\varphi(x, y, z) = -2xy + z^2$ associata all'equazione di Σ. Si vede facilmente che gli autovalori dell'operatore simmetrico associato a φ sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. In questo caso non dobbiamo operare alcuna traslazione; vediamo quindi che Σ è un iperboloide iperbolico. Dalla teoria svolta a lezione sappiamo che l'iperboloide iperbolico è rigato.

6.2. L'equazione di Σ è $(z - 1)(z + 1) = 2xy$. Poniamo $z + 1 = tx$ con t parametro reale. Dall'equazione ricaviamo che per $x \neq 0$ si ha $2y = t(z - 1)$. Una delle due schiere di rette è data da

$$r_t : \begin{cases} tx - z = 1 \\ 2y - tz = -t \end{cases} \qquad r_\infty : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Analogamente ponendo $z - 1 = tx$ si ha che l'altra schiera è data da

$$r'_t : \begin{cases} tx - z = -1 \\ 2y - tz = t \end{cases} \qquad r'_\infty : \begin{cases} x = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

6.3. La retta della prima schiera passante per $(0, 0, 1)$ è la retta r_∞. Sostituendo $(0, 0, 1)$ all'equazione della seconda schiera segue che la retta della seconda schiera passante per $(0, 0, 1)$ è data dal valore $t = 0$ ed è $z = 1$, $y = 0$.

6.4. Dal punto **6.1.** sappiamo che gli autovalori dell'operatore simmetrico T associato alla parte quadratica dell'equazione di Σ sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.
Si vede facilmente che $V_T(1) = \mathrm{Span}((-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,,\ (0, 0, 1))$ e $V_T(-1) = \mathbb{R}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.
Consideriamo il cambio di coordinate

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y' \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Con semplici conti Σ ha equazione nelle x', y', z'

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 1. \tag{2}$$

I piani $z' = k$ con k costante reale, intersecano Σ in circonferenze e quindi r è la retta $x' = 0$, $y' = 0$. Moltiplicando (1) per la trasposta della matrice ortogonale

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

otteniamo

$$x' = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \qquad y' = z \qquad z' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Quindi le equazioni cartesiane di r sono $x - y = 0$ e $z = 0$.
Da (2) si vede che ci sono due piani che tagliano Σ in due circonferenze di raggio $\sqrt{2}$, rispettivamente $z' = 1$ e $z' = -1$. Da (3) segue che le equazioni cartesiane di tali piani sono $x + y = \sqrt{2}$ e $x + y = -\sqrt{2}$.