Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 6.
Consegna di un documento pdf entro il giorno 16/05, ore 23.59,
direttamente alla tutor Francesca Leonardi tramite email.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_n[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$. È ben noto che $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base di V.
Sia $t \in \mathbb{R}$ e sia $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.
Consideriamo $P \in V$ e riguardiamolo come una funzione infinitamente derivabile su $\mathbb{R}$. Possiamo considerare la valutazione in t, $P(t)$, e, più in generale, $\frac{d^k P}{dx^k}(t)$.
Verificare che le applicazioni $V \to \mathbb{R}$ definite da

$$P \to P(t) \qquad \text{e} \qquad P \to \frac{d^k P}{dx^k}(t)$$

definiscono elementi di $V^\vee$.
Utilizzando questi funzionali per t opportuno determinare la base duale di $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $V^\vee$ lo spazio duale associato a V. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme di V; definiamo

$$S^\circ := \{L \in V^\vee \mid L(\underline{v}) = 0 \ \forall \underline{v} \in S\}.$$

$S^\circ \subset V^\vee$ è detto l'*annullatore* di $S \subset V$. Se R è un sottoinsieme di $V^\vee$ definiamo

$${}^\circ R := \{\underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = 0 \mid \forall L \in R\}.$$

${}^\circ R \subset V$ è detto l'*annullatore* di $R \subset V^\vee$.
2.1. Verificare che S° e ${}^\circ R$ sono sottospazi di $V^\vee$ e V rispettivamente.
2.2. Consideriamo $R \subset V^\vee$ e sia $R^\circ \subset V^{\vee\vee}$ il suo annullatore nel duale di $V^\vee$ e cioè nel biduale $V^{\vee\vee}$. Consideriamo l'isomorfismo canonico $\beta : V \to V^{\vee\vee}$. Dimostrare che $\beta({}^\circ R) = R^\circ$ in $V^{\vee\vee}$.
2.3. Verificare che $S \subset T \Rightarrow T^\circ \subset S^\circ$. Verificare che $S^\circ = (\text{Span}(S))^\circ$ e che ${}^\circ R = {}^\circ (\text{Span}(R))$.
2.4. Sia $U \leq V$. Sia $\underline{w} \in V \setminus U$. Verificare che esiste $L \in U^\circ$ tale che $L(\underline{w}) = 1$.
Suggerimento: completare una base di $U \oplus \mathbb{K}\underline{w}$ ad una base di V.
2.5. Sia $U \leq V$. Verificare che $U \subseteq {}^\circ(U^\circ)$. Utilizzando (2.4) verificare che ${}^\circ(U^\circ) \subseteq U$ (verificare che $V \setminus U \subseteq V \setminus {}^\circ (U^\circ)$...)
Concludere quindi che ${}^\circ(U^\circ) = U$.

Esercizio 3. Piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{K})$ con coordinate proiettive omogenee X_0, X_1, X_2. Consideriamo i punti

$$P'_0 = [1, 2, 1], \ \ P'_1 = [2, 0, 1], \ \ P'_2 = [1, -2, 0], \ \ U' = [1, 0, 0].$$

Vero o Falso: esistono coordinate proiettive omogenee (Y_0, Y_1, Y_2) tali che i 4 punti dati abbiano coordinate rispettivamente $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.

Esercizio 4. Consideriamo $P^2(\mathbb{K})$ e 4 suoi punti P_0, P_1, P_2, P_3 *in posizione generale*. Vi ricordo che se P e Q sono due punti distinti, allora $L(P, Q)$ è il sottospazio proiettivo congiungente i punti P e Q e cioè la retta per P e Q.
Siano

$$R := L(P_0, P_1) \cap L(P_2, P_3), \quad S = L(P_0, P_2) \cap L(P_1, P_3), \quad T = L(P_0, P_3) \cap L(P_1, P_2)$$

Verificare che i tre punti R, S, T sono non-allineati.
Suggerimento. Fissare un opportuno riferimento ....

Esercizio 5. Nello spazio proiettivo $P^3(\mathbb{R})$ siano π il piano di equazione: $X_0 + X_1 - X_2 + 2X_3 = 0$, r la retta di equazioni cartesiane

$$2X_0 - X_1 - X_2 + X_3 = 0 \qquad X_0 + 2X_1 - X_2 - X_3 = 0$$

e s la retta di equazioni parametriche

$$X_0 = t + u,\ X_1 = 2t - u,\ X_2 = -t,\ X_3 = u.$$

1. Verificare che le due rette sono sghembe e che il piano π non contiene nessuna delle due rette.
2. Trovare equazioni parametriche della retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.
Suggerimento: r' è la retta fra due opportuni punti....
3. L'esercizio precedente è un caso particolare del seguente enunciato:
Siano r e s due rette sghembe e π un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.
Dare una dimostrazione dell'enunciato generale.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{K}$ un campo e consideriamo il piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{K})$. Determinare la proposizione duale della seguente proposizione:
(a). *Siano $P_1, \ldots, P_6$ punti distinti tali che:*
(i) P_1, P_3, P_5 sono allineati; P_2, P_4, P_6 sono allineati e la retta contenente P_1, P_3, P_5 è distinta dalla retta contenente P_2, P_4, P_6;
(ii) nessuno dei P_i appartiene all'intersezione della retta contenente P_1, P_3, P_5 e della retta contenente P_2, P_4, P_6.
Allora i punti

$$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5), \quad L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6), \quad L(P_3, P_4) \cap L(P_6, P_1)$$

sono allineati.
Sia ora $P^3(\mathbb{K})$ lo spazio proiettivo numerico. Determinare le proposizioni duali delle seguenti proposizioni:
(b). *In $P^3(\mathbb{K})$ se due rette distinte si incontrano, allora generano un piano.*
(c). *In $P^3(\mathbb{K})$ tre punti distinti non allineati generano un piano.*
(d). La proposizione di cui in **3.** Esercizio 5:
Siano r e s due rette sghembe e π un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π..

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f : P(V) \to P(V)$ una proiettività. Dimostrare che

(1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, oppure, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e se $\dim(P(V))$ è pari, allora f ha un punto fisso, ovvero $f(P) = P$ per un certo $P \in P(V)$.
(2) Dare un'esempio di proiettività $g : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ che non ha un punto fisso.