Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Soluzioni del Foglio di Esercizi n. 6.
a cura di Francesca Leonardi e Paolo Piazza.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_n[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$. È ben noto che $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base di V.
Sia $t \in \mathbb{R}$ e sia $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.
Consideriamo $P \in V$ e riguardiamolo come una funzione infinitamente derivabile su $\mathbb{R}$. Possiamo considerare la valutazione in t, $P(t)$, e, più in generale, $\frac{d^k P}{dx^k}(t)$.
Verificare che le applicazioni $V \to \mathbb{R}$ definite da

$$P \to P(t) \qquad \text{e} \qquad P \to \frac{d^k P}{dx^k}(t)$$

definiscono elementi di $V^\vee$.
Utilizzando questi funzionali per t opportuno determinare la base duale di $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Soluzione. Sia $t \in \mathbb{R}$ fissato, chiamiamo $V_t : V \to \mathbb{R}$ l'applicazione di valutazione in t: $V_t(P) := P(t)$. Per dimostrare che $V_t \in V^\vee$ dimostriamo che è lineare: siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $P \in V$ di coordinate $(p_0, \ldots, p_n)$ nella base $\mathcal{E}$ (quindi $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$) e $Q \in V$ di coordinate $(q_0, \ldots, q_n)$, allora

$$V_t(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(t) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda p_k + \mu q_k) t^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} p_k t^k + \mu \sum_{k=0}^{n} q_k t^k =$$
$$= \lambda V_t(P) + \mu V_t(Q).$$

È ben noto che la derivazione è lineare e che la derivata di un polinomio è un polinomio: quindi $D^k := \frac{d^k P}{dx^k} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ è lineare in quanto composizione di k applicazioni lineari. Ne segue che fissato $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione $D^k_t : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathbb{R}_n[X] \ni P \to \frac{d^k P}{dx^k}(t) \in \mathbb{R}$$

è lineare, in quanto composizione di D^k e di V_t.
Osserviamo che la derivata $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ può essere definita in maniera puramente algebrica: è l'operatore lineare che è definito sulla base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ come segue: $1 \to \underline{0}$ (il polinomio nullo) e $x^j \to j x^{j-1}$.
Ricordiamo che la base duale di $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subset V$ è una $(n+1)$-upla $\mathcal{F} = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \subset V^\vee$ tale che $\phi_k(x^j) = \delta_{k,j}$. È allora immediato verificare che ponendo

$$\phi_0 := V_0 \quad \phi_k := \frac{1}{k!} D^k_0 \ \text{ per } \ j = 1, \ldots n$$

otteniamo la base duale di $\mathcal{E}$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $V^\vee$ lo spazio duale associato a V. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme di V; definiamo

$$S^\circ := \{L \in V^\vee \mid L(\underline{v}) = 0 \ \forall \underline{v} \in S\}.$$

$S^\circ \subset V^\vee$ è detto l'*annullatore* di $S \subset V$. Se R è un sottoinsieme di $V^\vee$ definiamo

$${}^\circ R := \{\underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = 0 \mid \forall L \in R\}.$$

$^\circ R \subset V$ è detto l'*annullatore* di $R \subset V^\vee$.
2.1. Verificare che S° e $^\circ R$ sono sottospazi di $V^\vee$ e V rispettivamente.
2.2. Consideriamo $R \subset V^\vee$ e sia $R^\circ \subset V^{\vee\vee}$ il suo annullatore nel duale di $V^\vee$ e cioè nel biduale $V^{\vee\vee}$. Consideriamo l'isomorfismo canonico $\beta : V \to V^{\vee\vee}$. Dimostrare che $\beta(^\circ R) = R^\circ$ in $V^{\vee\vee}$.
2.3. Verificare che $S \subset T \Rightarrow T^\circ \subset S^\circ$. Verificare che $S^\circ = (\mathrm{Span}(S))^\circ$ e che $^\circ R =^\circ (\mathrm{Span}(R))$.
2.4. Sia $U \leq V$. Sia $\underline{w} \in V \setminus U$. Verificare che esiste $L \in U^\circ$ tale che $L(\underline{w}) = 1$.
Suggerimento: completare una base di $U \oplus \mathbb{K}\underline{w}$ ad una base di V.
2.5. Sia $U \leq V$. Verificare che $U \subseteq\ ^\circ(U^\circ)$. Utilizzando (2.4) verificare che $^\circ(U^\circ) \subseteq U$ (verificare che $V \setminus U \subseteq V \setminus^\circ (U^\circ)$...)
Concludere quindi che $^\circ(U^\circ) = U$.

Soluzione. 2.1 Dimostriamo che S° è un sottospazio vettoriale di $V^\vee$: siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $L, M \in S^\circ$, allora, per ogni $\underline{v} \in S$ si ha che

$$(\lambda L + \mu M)(\underline{v}) = \lambda L(\underline{v}) + \mu M(\underline{v}) = 0,$$

dunque $\lambda L + \mu M \in S^\circ$. Analogamente, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\underline{v}, \underline{w} \in\ ^\circ R$, allora per ogni $L \in R$ si ha

$$L(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda L(\underline{v}) + \mu L(\underline{w}) = 0,$$

dunque $\lambda \underline{v} + \mu \underline{w} \in\ ^\circ R$.
2.2 Per dimostrare che $\beta(^\circ R) = R^\circ$ dimostriamo la doppia inclusione.
Sia $F \in \beta(^\circ R)$. Quindi $F = \beta(\underline{v})$ per un unico $\underline{v} \in^\circ R$. Calcoliamo $F(L)$ con $L \in R$. Per definizione di β si ha $F(L) = L(\underline{v})\ \forall L \in V^\vee$. Ma allora $F(L) = L(\underline{v}) = 0$ se $L \in R$, dato che $L(\underline{v}) = 0$ se $\underline{v} \in^\circ R$ e $L \in R$. Quindi $\beta(^\circ R) \subseteq R^\circ$.
Il viceversa è identico. Sia $F \in R^\circ$, tale cioè che $F(L) = 0\ \forall L \in R$. Essendo βun isomorfismo esiste unico $\underline{v} \in V$ tale che $\beta(\underline{v}) = F$. Ma allora $F(L) = L(\underline{v})\ \forall L \in V^\vee$. Otteniamo quindi che $L(\underline{v}) = 0\ \forall L \in R$, cioè che $\underline{v} \in\ ^\circ R$, dunque $F \in \beta(^\circ R)$, da cui $R^\circ \subseteq \beta(^\circ R)$.
2.3 Sia $L \in T^\circ$. Per definizione $L(\underline{v}) = 0\ \forall \underline{v} \in T$, ma allora, in particolare $L(\underline{v}) = 0\ \forall \underline{v} \in S$ (perché $S \subset T$), dunque $L \in S^\circ$, da cui $T^\circ \subset S^\circ$.
Per quanto abbiamo appena visto, siccome $S \subset \mathrm{Span}(S)$, si ha l'inclusione
$(\mathrm{Span}(S))^\circ \subset S^\circ$. Viceversa, sia $\{\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_k\}$ una base di $\mathrm{Span}(S)$ e sia $L \in S^\circ$. Per definizione $L(\underline{s}) = 0\ \forall \underline{s} \in S$, dunque in particolare $L(\underline{s}_i) = 0\ \forall i = 1, \ldots, k$. Allora, per linearità, $L(\sum_{i=1}^k \sigma_i \underline{s}_i) = 0$, dunque $L \in (\mathrm{Span}(S))^\circ$.
Risulta quindi dimostrato che $S^\circ = (\mathrm{Span}(S))^\circ$.
Per dimostrare l'ultima uguaglianza possiamo procedere in modo analogo a come abbiamo lavorato finora, oppure utilizzare i risultati già mostrati. Sceliamo questo secondo metodo. Per quanto visto al punto **2.2** $\beta(^\circ R) = R^\circ$ e $\beta(^\circ(\mathrm{Span}(R))) = (\mathrm{Span}(R))^\circ$. Abbiamo appena dimostrato che $R^\circ = (\mathrm{Span}(R))^\circ$. Otteniamo così $\beta(^\circ R) = \beta(^\circ(\mathrm{Span}(R)))$; applicando β^{-1} (che è un isomorfismo) a entrambi i membri otteniamo $^\circ R =\ ^\circ(\mathrm{Span}(R))$.
2.4 Sia $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k\}$ una base di U, allora $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k, \underline{w}\}$ è una base di $U \oplus \mathbb{K}\underline{w}$. La completiamo a una base $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k, \underline{w}, \underline{w}_{k+2}, \ldots, \underline{w}_n\}$ di V. Consideriamo la base duale $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$. Per definizione $L = \phi_{k+1}$ soddisfa la richiesta dell'esercizio (in realtà possiamo dire di più: i funzionali come sopra sono le combinazioni lineari delle $\phi_{k+1}, \ldots, \phi_n$ con coefficiente di ϕ_{k+1} uguale a 1).
2.5 Sia $\underline{u} \in U$. Per definizione $L(\underline{u}) = 0\ \forall L \in U^\circ$. Pertanto $\underline{u} \in \{\underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = 0\ \forall L \in U^\circ\} =\ ^\circ(U^\circ)$.

Per dimostrare che $^\circ(U^\circ) \subseteq U$, seguiamo il suggerimento e mostriamo che $V \setminus U \subseteq V \setminus {}^\circ(U^\circ)$: sia $\underline{v} \in V \setminus U$, per quanto visto esiste un funzionale lineare $F \in V^\vee$ tale che $F \in U^\circ$ e $F(\underline{v}) = 1 \neq 0$, pertanto $\underline{v} \notin {}^\circ(U^\circ)$, cioè $\underline{v} \in V \setminus {}^\circ(U^\circ)$.
Risultano dimostrate le due inclusioni, da cui segue che $U = {}^\circ(U^\circ)$.

Esercizio 3. Piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{K})$ con coordinate proiettive omogenee X_0, X_1, X_2. Consideriamo i punti

$$P_0' = [1,2,1]\,, \quad P_1' = [2,0,1]\,, \quad P_2' = [1,-2,0]\,, \quad U' = [1,0,0].$$

Vero o Falso: esistono coordinate proiettive omogenee (Y_0, Y_1, Y_2) tali che i 4 punti dati abbiano coordinate rispettivamente $(1,0,0)\,, \quad (0,1,0)\,, \quad (0,0,1)\,, \quad (1,1,1)$.

Soluzione. Falso: i primi tre punti sono allineati e quindi non sono linearmente indipendenti. Ne segue che i quattro punti non sono in posizione generale e non possono essere assunti come punti fondamentali e punto unità di un nuovo riferimento.

Esercizio 4. Consideriamo $P^2(\mathbb{K})$ e 4 suoi punti P_0, P_1, P_2, P_3 *in posizione generale.* Vi ricordo che se P e Q sono due punti distinti, allora $L(P,Q)$ è il sottospazio proiettivo congiungente i punti P e Q e cioè la retta per P e Q.
Siano

$$R := L(P_0,P_1) \cap L(P_2,P_3)\,, \quad S = L(P_0,P_2) \cap L(P_1,P_3)\,, \quad T = L(P_0,P_3) \cap L(P_1,P_2)$$

Verificare che i tre punti R, S, T sono non-allineati.
Suggerimento. Fissare un opportuno riferimento ....

Soluzione.
Possiamo scegliere P_0, P_1, P_2 e P_3 come, rispettivamente, punti fondamentali e punto unità di un riferimento proiettivo (perché, per ipotesi, sono in posizione generale). Quindi le loro coordinate sono rispettivamente

$$[1,0,0]\,, \quad [0,1,0]\,, \quad [0,0,1] \ \text{ e } \ [1,1,1]\,.$$

A questo punto scriviamo le equazioni cartesiane delle rette che definiscono R, S e T.
Brevemente:
$L(P_0,P_1)$ ha equazione $X_2 = 0$, mentre $L(P_2,P_3)$ ha equazione $X_0 = X_1$. Quindi $R = [1,1,0]$.
$L(P_0,P_2)$ ha equazione $X_1 = 0$, mentre $L(P_1,P_3)$ ha equazione $X_0 = X_2$. Quindi $S = [1,0,1]$
$L(P_0,P_3)$ ha equazione $X_1 = X_2$, mentre $L(P_1,P_2)$ ha equazione $X_0 = 0$. Quindi $T = [0,1,1]$
È immediato verificare che la matrice che ha come righe le coordinate dei tre punti R, S, T ha determinante diverso da zero. Ne segue che i tre punti non sono allineati.

Esercizio 5. Nello spazio proiettivo $P^3(\mathbb{R})$ siano π il piano di equazione: $X_0 + X_1 - X_2 + 2X_3 = 0$, r la retta di equazioni cartesiane

$$2X_0 - X_1 - X_2 + X_3 = 0 \qquad X_0 + 2X_1 - X_2 - X_3 = 0$$

e s la retta di equazioni parametriche

$$X_0 = t + u,\ X_1 = 2t - u,\ X_2 = -t,\ X_3 = u.$$

1. Verificare che le due rette sono sghembe e che il piano π non contiene nessuna delle due rette.

2. Trovare equazioni parametriche della retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.
Suggerimento: r' è la retta fra due opportuni punti....
3. L'esercizio precedente è un caso particolare del seguente enunciato:
Siano r e s due rette sghembe e π un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.
Dare una dimostrazione dell'enunciato generale.

Soluzione.
1. È subito visto che s ha equazioni cartesiane:

$$X_0 + X_2 - X_3 = 0$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$$

r ed s hanno intersezione non vuota se e solo se il sistema 4×4 formato dalle loro equazioni cartesiane ha soluzioni non-banali. Ma la matrice dei coefficienti di questo sistema 4×4 ha rango 4: ne segue che le due rette sono sghembe.
Per studiare la mutua posizione di π e r e π e s andiamo ad esaminare i due sistemi 3×4 che si ottengono mettendo a sistema l'equazione di π con le equazioni cartesiane di r e l'equazione di π con le equazioni cartesiane di s. È elementare verificare che le matrici dei coefficienti di questi due sistemi hanno entrambi rango 3. Ne segue che r non è contenuta in π e analogamente per s; in particolare r ha in comune con π un punto di $P^3(\mathbb{R})$ ed analogamente per s.
2. Sia $P_0 := r \cap \pi$ e sia $P_1 := s \cap \pi$. Questi due punti si trovano risolvendo esplicitamente i due sistemi di cui in **1.**: si trova $P_0 = [7, 3, 12, 1]$ e $P_1 = [1, -4, 1, 2]$. La retta cercata è la retta per questi due punti: essa ha equazioni parametriche

$$X_0 = 7t + u\,, \quad X_1 = 3t - 4u\,, \quad X_2 = 12t + u\,, \quad X_3 = t + 2u\,.$$

3. Dimostriamo che r (rispettivamente s) interseca π in un punto P (rispettivamente Q). Utilizziamo la formula di Grassmann:

$$\dim(\pi \cap r) = \dim(\pi) + \dim(r) - \dim(L(\pi, r) = 2 + 1 - 3 = 0,$$

dove abbiamo usato che π non contiene r per affermare che $\dim L(\pi, r) = 3$. Pertanto $\pi \cap r = \{P\}$. In modo analogo si dimostra che $\dim(\pi \cap s) = 0$, da cui $\pi \cap s = \{Q\}$.
Osserviamo che siccome r e s sono sghembe i punti P e Q sono distinti. Esiste un'unica retta che contiene P e Q, indicata con $r' = L(P, Q)$, che ovviamente interseca r (in P, per costruzione) e s (in Q). Sempre per costruzione, tale retta è contenuta in π (perché π è un sottospazio proiettivo e r' contiene due punti distinti di π).

Esercizio 6. Sia $\mathbb{K}$ un campo e consideriamo il piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{K})$. Determinare la proposizione duale della seguente proposizione:
(a). *Siano $P_1, \ldots, P_6$ punti distinti tali che:*
(i) P_1, P_3, P_5 sono allineati; P_2, P_4, P_6 sono allineati e la retta contenente P_1, P_3, P_5 è distinta dalla retta contenente P_2, P_4, P_6;
(ii) nessuno dei P_i appartiene all'intersezione della retta contenente P_1, P_3, P_5 e della retta contenente P_2, P_4, P_6.
Allora i punti

$$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5), \;\; L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6), \;\; L(P_3, P_4) \cap L(P_6, P_1)$$

sono allineati.

Sia ora $P^3(\mathbb{K})$ lo spazio proiettivo numerico. Determinare le proposizioni duali delle seguenti proposizioni:
(b). *In* $P^3(\mathbb{K})$ *se due rette distinte si incontrano, allora generano un piano.*
(c). *In* $P^3(\mathbb{K})$ *tre punti distinti non allineati generano un piano.*
(d). La proposizione di cui in **3.** Esercizio 5:
Siano r *e* s *due rette sghembe e* π *un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta* r' *che interseca sia* r *che* s *ed è contenuta in* π*..*

Soluzione.
(a). L'ipotesi (ii) può essere riscritta come segue:
(ii) nessuno dei P_i *appartiene sia alla retta* $L(P_1, P_3, P_5)$ *che alla retta* $L(P_2, P_4, P_6)$*.*
Ricordando il principio di dualità nei piani proiettivi, otteniamo il seguente enunciato:
Siano $r_1, \ldots, r_6$ *sei rette proiettive distinte in* $P^2(\mathbb{K})$ *tali che:*
(i) r_1, r_3, r_5 *si intersecano in un punto* P*;* r_2, r_4, r_6 *si intersecano in un punto* Q *e* $P \neq Q$*;*
(ii) nessuna delle rette r_i *contiene sia* P *che* Q*.*
Allora le rette

$$L(r_1 \cap r_2, r_4 \cap r_5), \quad L(r_2 \cap r_3, r_5 \cap r_6), \quad L(r_3 \cap r_4, r_6 \cap r_1)$$

si incontrano in un punto.
Ricordando invece il principio di dualità negli spazi proiettivi abbiamo le proposizioni duali di **(b)** e **(c)**.
(b). La duale di
In $P^3(\mathbb{K})$ *se due rette distinte si intersecano in un punto, allora generano un piano.*
è la proposizione:
In $P^3(\mathbb{K})$ *se due rette distinte generano un piano, allora si intersecano in un punto.*
(c). La Proposizione duale è:
In $P^3(\mathbb{K})$ *tre piani distinti che non contengono una retta comune si incontrano in un punto.*
Ci sono piccole variazioni di questa proposizione che sono del tutto lecite; ad esempio, possiamo anche scrivere:
In $P^3(\mathbb{K})$ *tre piani distinti non appartenenti allo stesso fascio si incontrano in un punto.*
(d). La duale di
Siano r *e* s *due rette sghembe e* π *un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta* r' *che interseca sia* r *che* s *ed è contenuta in* π*.*
è la Proposizione
Siano r *e* s *due rette tali che* $L(r \cup s) = P^3(\mathbb{K})$ *e* P *un punto che non è contenuto in nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta* r' *tale che* $L(r \cup r')$ *è un piano,* $L(s \cup r')$ *è un piano e che contiene* P*.*
Anche in questo caso ci sono varianti: ad esempio $L(r \cup s) = P^3(\mathbb{K})$ vuol dire che r ed s sono sghembe....

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f : P(V) \to P(V)$ una proiettività. Dimostrare che

(1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, oppure, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e se $\dim(P(V))$ è pari, allora f ha un punto fisso, ovvero $f(P) = P$ per un certo $P \in P(V)$.

(2) Dare un'esempio di proiettività $g : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ che non ha un punto fisso.

Soluzione. (1) Dimostriamo che se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora $f : P(V) \to P(V)$ ammette almeno un punto fisso. La proiettività f è data da $\phi \in GL(V)$. È immediato che $P = [\underline{v}]$ è un punto fisso di f se e solo se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\phi\underline{v} = \lambda\underline{v} \quad \lambda \in \mathbb{C}$. Quindi $P = [\underline{v}]$ è un punto fisso di f se e solo se $\underline{v}$ è un autovettore dell'isomorfismo $\phi : V \to V$ associato a f. Notare che ϕ non ha autovalore $\lambda = 0$ essendo un isomorfismo. Essendo $\mathbb{C}$ algebricamente chiuso, il polinomio caratteristico $p_\phi(\lambda)$ ha radici nel campo. Detta λ_0 una soluzione, avremo che $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda_0 \,\mathrm{Id}) \neq \{\underline{0}\}$, dunque esiste un autovettore $\underline{v}_0$ associato a tale autovalore. Il punto $[\underline{v}_0]$ è un punto fisso.
Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, possiamo cercare di fare la stessa dimostrazione, osservando preliminarmente che siccome $\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso, non è detto che un qualsiasi polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ abbia zeri in $\mathbb{R}$ (classico esempio: $x^2 + 1$). In realtà, nella dimostrazione appena vista abbiamo usato solamente che esisteva almeno *una* radice nel campo. Per ipotesi $\dim(P(V))$ è pari e quindi $\dim V$ è dispari. Allora il polinomio caratteristico p_ϕ ha grado dispari, dunque ammette almeno una soluzione in $\mathbb{R}$. Detta λ_0 tale soluzione possiamo concludere come prima.
(2) Sia $g : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la proiettività :

$$g([x_0, x_1]) = [-x_1, x_0].$$

Notiamo che l'isomorfismo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associato a g è L_A, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, che non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, dunque g non ammette punti fissi.