Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 5.
Consegna di un documento pdf entro il giorno 30/04, ore 9
direttamente alla tutor Francesca Leonardi tramite email.

Esercizio 1.
Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) determinare equazioni cartesiane per il piano passante per il punto di coordinate $(-1, 0, 1)$ ed ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.
Siano A, B, C, D i punti di coordinate

$$A = (1, 2, 2), \quad B = (2, 1, 2), \quad C = (2, 2, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

(i). Si verifichi che che A, B, C non sono allineati e che A, B, C, D non sono complanari.
Scrivere un'equazione cartesiana del piano α contenente A, B, C.
(ii). Calcolare la distanza tra α e D.

Esercizio 3.
Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) si consideri la retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Determinare i punti di s che distano $\sqrt{3}$ dall'origine.

Esercizio 4.
Consideriamo uno spazio euclideo E di dimensione 2 su uno spazio vettoriale euclideo $(V, < , >)$ con riferimento cartesiano $O\underline{e}_1\underline{e}_2$ fissato e coordinate associate (x_1, x_2). Sia r la retta di equazione cartesiana $3x_1 + 6x_2 + 5 = 0$. Sia O' il punto di coordinate $(-4, 1)$ e siano $\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2$, $\quad \underline{f}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2$ vettori di V.
(i). Verificare che $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano di E. Siano (y_1, y_2) le coordinate associate a tale riferimento.
(ii) Determinare le formule di cambiamento di coordinate, dalle (x_1, x_2) alle (y_1, y_2) e viceversa.
(iii). Determinare l'equazione cartesiana della retta r nel riferimento $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$.

Esercizio 5.
Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) sono date le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Calcolare la distanza fra r ed s (senza far uso di formule generali).

Esercizio 6.
Siamo in uno spazio euclideo di dimensione 3 con riferimento cartesiano fissato. Verificare che i punti $P_1(-1,1,2)$, $P_2(0,1,1)$, $P_3(1,2,0)$, $P_4(0,2,1)$ sono vertici consecutivi di un parallelogramma.
Calcolare l'area di tale parallelogramma (può essere utile la nozione di prodotto vettoriale...).

Esercizio 7. Siamo nel piano euclideo numerico E su $(\mathbb{R}^2, \bullet)$, con riferimento cartesiano standard $O\underline{e}_1\underline{e}_2$ fissato.
7.1 Sia $R_{C,\theta} \in \mathrm{Isom}(E)$ la rotazione di un angolo θ attorno al punto C di coordinate (c_1, c_2). Utilizzando la traslazione $t_{(c_1,c_2)}$, scrivete l'espressione in coordinate di $R_{C,\theta}$.
7.2 Sia r una retta per $C = (c_1, c_2)$ di direzione $\underline{r}$, con $\|\underline{r}\| = 1$. Sia $\theta \in [0, \pi]$ l'angolo che $\underline{r}$ forma con $\underline{e}_1$: $\theta := \widehat{\underline{r}\underline{e}_1}$. Sia ρ_r la riflessione rispetto a r e $S_{\mathbb{R}\underline{r}}$ la simmetria ortogonale rispetto a $\mathbb{R}\underline{r}$.
Scrivere la matrice associata a $S_{\mathbb{R}\underline{r}}$ nella base standard in termini di funzioni trigonometriche e dell'angolo θ; sia M_θ tale matrice. Che relazione c'è fra M_θ e la riflessione rispetto alla retta $r_O = \mathbb{R}\underline{r}$ passante per l'origine e parallela a r ? L'esercizio 4 del compito 2 può essere utile.
7.3 Utilizzando la traslazione $t_{(c_1,c_2)}$ scrivere l'espressione in coordinate di ρ_r in funzione di M_θ e di (c_1, c_2).
7.4 Siano $r_O = \mathbb{R}\underline{r}$ ed $s_O = \mathbb{R}\underline{s}$ due rette per l'origine distinte. Sia $\theta = \widehat{\underline{r}\underline{e}_1}$ e sia $\phi = \widehat{\underline{s}\underline{e}_1}$.
Verificare che $\rho_{r_O} \circ \rho_{s_O}$ è una rotazione di un angolo ψ e determinare ψ in funzione di θ e ϕ.
7.5 Vero o falso: $\rho_{r_O} \circ \rho_{s_O} = \rho_{s_O} \circ \rho_{r_O}$

Esercizio 8 (facoltativo).
Dimostrare il seguente notevole
Teorema (diagonalizzazione simultanea). Sia V uno spazio vettoriale e siano $T, S \in \mathrm{End}(V)$. Supponiamo che T e S siano diagonalizzabili. Verificare che esiste una base *comune* di autovettori se e solo se $T \circ S = S \circ T$

Suggerimenti. Se esiste una base *comune* di autovettori allora è facile vedere che i due operatori commutano. La parte più difficile è il viceversa: *se T e S sono diagonalizzabili e se $T \circ S = S \circ T$ allora esiste una base comune di autovettori.*
Provate ad usare il principio d'induzione sulla dimensione di V. Se $\dim V = 1$ la tesi del teorema è chiaramente vera. Sia $n = \dim V$. Supponiamo quindi che il risultato sia vero per spazi vettoriali di dimensione $< n$ e dimostriamolo per spazi di dimensione n. Possiamo supporre che ad esempio $T \neq c\,\mathrm{Id}$, $c \in \mathbb{R}$ (perchè altrimenti il risultato sarebbe ovvio). Considerate gli autovalori di T ed i relativi autospazi. Dato che $T \neq c\,\mathrm{Id}, c \in \mathbb{R}$, la dimensione di ogni autospazio di T è *strettamente* minore di n. Usando la seconda ipotesi dimostrate che ognuno di questi autospazi è un sottospazio *invariante* per S. Ha senso quindi considerare la restrizione di S ad ognuno di questi autospazi. Dimostrate che ognuna di queste restrizioni è ancora un operatore diagonalizzabile; osservando poi che essa commuta con *la restrizione di T* all'autospazio (la quale è semplicemente uguale alla moltiplicazione per l'autovalore) concludete la dimostrazione.