Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 5. Soluzioni.
A cura di Francesca Leonardi e Paolo Piazza.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) determinare equazioni cartesiane per il piano passante per il punto di coordinate $(?1, 0, 1)$ ed ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} .$$

Soluzione. Per prima cosa ricaviamo la direzione della retta. Un possibile metodo è quello di scriverne le equazioni parametriche. Altrimenti possiamo ragionare come segue: le equazioni cartesiane di una retta la individuano geometricamente come intersezione di due piani. Ricordando che se un piano ha equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ il vettore (a, b, c) è perpendicolare ad esso, deduciamo che ogni retta che giace sul piano ha direzione ortogonale al vettore (a, b, c). Possiamo dunque affermare che la direzione della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

è ortogonale ai vettori $(1, 0, 1)$ e $(1, -1, 0)$. Per determinarla ne calcoliamo il prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (1, -1, 0)$. Esso si ottiene sviluppando secondo la prima riga il determinante della "matrice" nella formula che segue :

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{i} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{j} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \hat{k} \equiv (1, 1, -1).$$

Il piano cercato ha come vettore normale $(1, 1, -1)$, dunque (per quanto richiamato prima) ha equazione cartesiana della forma $x+y-z+d = 0$. Per determinare d imponiamo il passaggio per il punto $(1, 0, 1)$: sostituendo le coordinate nell'equazione otteniamo:

$$1 - 1 + d = 0$$

da cui $d = 0$. Il piano cercato ha equazione $x + y - z = 0$.

Esercizio 2. Siano A, B, C, D i punti di coordinate

$$A = (1, 2, 2), \quad B = (2, 1, 2), \quad C = (2, 2, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

(i). Si verifichi che che A, B, C non sono allineati e che A, B, C, D non sono complanari. Scrivere un?equazione cartesiana del piano α contenente A, B, C.
(ii). Calcolare la distanza tra α e D.

Soluzione. Verifichiamo che i punti A, B, C non sono allineati mostrando che i vettori $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$ non sono paralleli. Questo segue banalmente dal fatto che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Analogamente, per verificare che A, B, C, D non sono complanari mostriamo che i vettori $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, -1, -1)$ sono linearmente indipendenti, conseguenza del fatto che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3.
Il piano α passa per il punto A e ha giacitura generata dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. La sua equazione cartesiana si ottiene imponendo che

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

In alternativa, le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t \\ z = 2 - s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo l'equazione cartesiana sostituendo:

$$\begin{cases} x = 1 + t + s \\ t = 2 - y \\ s = 2 - z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 1 + (2 - y) + (2 - z) \quad \Rightarrow \quad x + y + z - 5 = 0.$$

Per trovare la distanza tra il piano possiamo utilizzate la formula per la distanza tra un piano e un punto:

$$\operatorname{dist}(\alpha, D) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) si consideri la retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Determinare i punti di s che distano $\sqrt{3}$ dall?origine.

Soluzione. Scriviamo le equazioni parametriche per la retta s. Ponendo $z = t$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t - 2 \\ z = t \end{cases}.$$

I punti di s che distano $\sqrt{3}$ dall?origine soddisfano l'equazione sono della forma $(1 - 2t, t - 2, t)$ in cui t soddisfa l'equazione

$$\sqrt{(1-2t)^2 + (t-2)^2 + t^2} = \sqrt{3}$$
$$(1-2t)^2 + (t-2)^2 + t^2 = 3$$
$$6t^2 - 8t + 2 = 0$$
$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$
$$t_1 = 1 \qquad t_2 = \frac{1}{3}.$$

I punti cercati sono dunque

$$P_1 = (-1,-1,1) \qquad P_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Esercizio 4. Consideriamo uno spazio euclideo E di dimensione 2 su uno spazio vettoriale euclideo $(V, <,>)$ con riferimento cartesiano $O\underline{e}_1\underline{e}_2$ fissato e coordinate associate (x_1, x_2). Sia r la retta di equazione cartesiana $3x_1+6x_2+5 = 0$. Sia O' il punto di coordinate $(-4,1)$ e siano $\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2$, $\underline{f}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2$ vettori di V .
(i). Verificare che $O'\underline{f}_1\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano di E. Siano (y_1, y_2) le coordinate associate a tale riferimento.
(ii). Determinare le formule di cambiamento di coordinate, dalle (x_1, x_2) alle (y_1, y_2) e viceversa.
(iii). Determinare l?equazione cartesiana della retta r nel riferimento $O'\underline{f}_1\underline{f}_2$.

Soluzione. Per verificare che $O'\underline{f}_1\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano calcoliamo i prodotti scalari:

$$\begin{aligned}
< \underline{f}_1, \underline{f}_1 > &=< \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2 >= \\
&= \frac{1}{2}(< \underline{e}_1, \underline{e}_1 > + < \underline{e}_1, \underline{e}_2 > + < \underline{e}_2, \underline{e}_1 > + < \underline{e}_2, \underline{e}_2 >) = 1; \\
< \underline{f}_1, \underline{f}_2 > &=< \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2, -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2 >= \\
&= \frac{1}{2}(- < \underline{e}_1, \underline{e}_1 > + < \underline{e}_1, \underline{e}_2 > - < \underline{e}_2, \underline{e}_1 > + < \underline{e}_2, \underline{e}_2 >) = 0; \\
< \underline{f}_2, \underline{f}_2 > &=< -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2 >= \\
&= \frac{1}{2}(< \underline{e}_1, \underline{e}_1 > - < \underline{e}_1, \underline{e}_2 > - < \underline{e}_2, \underline{e}_1 > + < \underline{e}_2, \underline{e}_2 >) = 1.
\end{aligned}$$

I vettori $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$ sono ortonormali, dunque $O'\underline{f}_1\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano.
Determinare le formule del cambiamento di coordinate. Sia $P \in E$ e (x_1, x_2) le sue le coordinate in $O\underline{e}_1\underline{e}_2$. Scriviamo innanzitutto $\overrightarrow{OO'} = -4\underline{e}_1 + \underline{e}_2$ e calcoliamo la matrice del cambiamento di base in V:

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Quindi possiamo scrivere, per definizione,

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = (\underline{f}_1, \underline{f}_2)\, M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \tag{1}$$

Vogliamo determinare (y_1, y_2) tali che $\overrightarrow{O'P} = y_1\underline{f}_1 + y_2\underline{f}_2$. Si ha che

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP} = 4\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 + 4 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\underline{f}_1, \underline{f}_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 + 4 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \equiv (\underline{e}_1, \underline{e}_2)\,(\underline{x} - (-4,1)^t).$$

Utilizzando (1) e ricordando che le coordinate rispetto ad una base sono univocamente determinate troviamo:

$$\underline{y} = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})(\underline{x} - (-4,1)^t)$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Viceversa:

$$\underline{x} = M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\underline{y} + \overrightarrow{OO'}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando questo risultato possiamo riscrivere l'equazione di r:

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - 4\right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 1\right) + 5 = 0$$

$$9y_1 + 3y_2 - \sqrt{2} = 0.$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x,y,z) sono date le rette

$$r \quad : \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \qquad s \quad : \quad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Calcolare la distanza fra r ed s (senza far uso di formule generali).

Soluzione. Una possibile soluzione a questo esercizio può essere data osservando che la distanza tra r e s è uguale alla distanza tra un qualsiasi punto di s e il piano π che contiene r parallelo ad s. Utilizzando il metodo del fascio troviamo che il piano π ha equazione del tipo $\lambda(2x - y + z - 1) + \mu(x + y + 3z - 2) = 0$. Per determinare i parametri λ e μ imponiamo la condizione di parallelismo tra π e s, che equivale a richiedere che il vettore direttore di s, $(-1,3,1)$, appartenga alla giacitura di π, che ha equazione $\pi_O : \lambda(2x - y + z) + \mu(x + y + 3z) = 0$:

$$\lambda(2 \cdot (-1) - 3 + 1) + \mu((-1) + 3 + 3 \cdot 1) = 0$$

$$-4\lambda + 5\mu = 0.$$

Una possibile soluzione è $(\lambda, \mu) = (5,4)$. L'equazione del piano π

$$14x - y + 17z - 13 = 0.$$

Definiamo $\underline{\tilde{v}} = (14,-1,17)$ il vettore normale a π e $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{486}}(14,-1,17)$ la sua normalizzazione.
Scegliamo un punto $Q \in s$: ponendo ad esempio $t = 0$ otteniamo $Q = (2,1,-1)$. Scegliamo ora un punto $P \in \pi$, ad esempio $P = (1,1,0)$. Affermiamo che la lunghezza della proiezione del vettore $\overrightarrow{PQ}$ sulla retta $\mathbb{R}\underline{v}$ è uguale alla distanza tra la retta s e il piano π, cioè la distanza tra r e s:

$$\mathrm{dist}(r,s) = ||P_{\mathbb{R}\underline{v}}(\overrightarrow{PQ})|| = || < \overrightarrow{PQ}, \underline{v} > \underline{v}|| = | < \overrightarrow{PQ}, \underline{v} > | = \frac{3}{\sqrt{486}}.$$

Esercizio 6. Siamo in uno spazio euclideo di dimensione 3 con riferimento cartesiano fissato. Verificare che i punti $P_1(-1,1,2), P_2(0,1,1), P_3(1,2,0), P_4(0,2,1)$ sono vertici consecutivi di un parallelogramma.
Calcolare l'area di tale parallelogramma (può essere utile la nozione di prodotto vettoriale...).

Soluzione. Calcoliamo i seguenti vettori:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1) \quad \overrightarrow{P_2P_3} = (1,1,-1) \quad \overrightarrow{P_3P_4} = (-1,0,1) \quad \overrightarrow{P_4P_1} = (-1,-1,1).$$

Si vede che questi vettori sono paralleli due a due, dunque P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici consecutivi di un parallelogramma.
Ricordiamo che, dati due vettori, la norma del loro prodotto vettoriale è uguale all'area del parallelogramma che individuano. Concludiamo dunque l'esercizio calcolando:

$$\mathcal{A} = ||\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_4}|| = ||\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} || =$$

$$= \sqrt{\left(\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Esercizio 7. Siamo nel piano euclideo numerico E su $(\mathbb{R}^2, \bullet)$, con riferimento cartesiano standard $O\underline{e}_1\underline{e}_2$ fissato.
7.1 Sia $R_{C,\theta} \in \mathrm{Isom}(E)$ la rotazione di un angolo θ attorno al punto C di coordinate (c_1, c_2). Utilizzando la traslazione $t_{(c_1,c_2)}$, scrivete l' espressione in coordinate di $R_{C,\theta}$.
7.2 Sia r una retta per $C = (c_1, c_2)$ di direzione $\underline{r}$, con $||\underline{r}|| = 1$. Sia $\theta \in [0, \pi]$ l'angolo che $\underline{r}$ forma con $\underline{e}_1$: $\theta := \widehat{\underline{r}\underline{e}_1}$. Sia ρ_r la riflessione rispetto a r e $S_{\mathbb{R}\underline{r}}$ la simmetria ortogonale rispetto a $\mathbb{R}\underline{r}$. Scrivere la matrice associata a $S_{\mathbb{R}\underline{r}}$ nella base standard in termini di funzioni trigonometriche e dell'angolo θ; sia M_θ tale matrice. Che relazione c' è fra M_θ e la riflessione rispetto alla retta $r_O = S_{\mathbb{R}\underline{r}}$ passante per l'origine e parallela a $\underline{r}$? L' esercizio 4 del compito 2 può essere utile.
7.3 Utilizzando la traslazione $t_{(c_1,c_2)}$ scrivere l'espressione in coordinate di ρ_r in funzione di M_θ e di (c_1, c_2).
7.4 Siano $r_O = \mathbb{R}\underline{r}$ ed $s_O = \mathbb{R}\underline{s}$ due rette per l?origine distinte. Sia $\theta = \widehat{\underline{r}\underline{e}_1}$ e sia $\phi = \widehat{\underline{s}\underline{e}_1}$. Verificare che $\rho_{r_O} \circ \rho_{s_O}$ è una rotazione di un angolo ψ e determinare ψ in funzione di θ e ϕ.
7.5 Vero o falso: $\rho_{r_O} \circ \rho_{s_O} = \rho_{s_O} \circ \rho_{r_O}$.

Soluzione. 7.1 Ricordando che la matrice della rotazione attorno all'origine è rappresentata dalla matrice

$$R_{O,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

scriviamo $R_{C,\theta}$ come composizione di applicazioni: $R_{C,\theta} = t_{(c_1,c_2)} \circ R_{O,\theta} \circ t_{(-c_1,-c_2)}$:

$$R_{C,\theta}\underline{x} = (t_{(c_1,c_2)} \circ R_{O,\theta} \circ t_{(-c_1,-c_2)})\underline{x} = (t_{(c_1,c_2)} \circ R_{O,\theta})(\underline{x} - \underline{c}) =$$
$$= t_{(c_1,c_2)}(R_{O,\theta}(\underline{x} - \underline{c})) = (R_{O,\theta}(\underline{x} - \underline{c})) + \underline{c} = R_{O,\theta}\underline{x} + (\mathrm{Id} - R_{O,\theta})\underline{c}.$$

Esplicitamente otteniamo:

$$R_{C,\theta}\underline{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)c_1 + \sin\theta c_2 \\ \sin\theta c_1 + (1-\cos\theta)c_2 \end{pmatrix}.$$

7.2 Abbiamo già visto che la matrice associata a $S_{\mathbb{R}\underline{r}}$ è

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Tale matrice rappresenta la riflessione rispetto a una retta per l'origine che forma con $\underline{e}_1$ un angolo θ, denotata con ρ_{r_O}.
7.3 Con un procedimento analogo a quanto fatto per esprimere $R_{C,\theta}$, scriviamo:

$$\begin{aligned} \rho_r P &= (t_{(c_1,c_2)} \circ \rho_{r_O} \circ t_{(-c_1,-c_2)})P = (t_{(c_1,c_2)} \circ \rho_{r_O})(P - C) = \\ &= t_{(c_1,c_2)}(\rho_{r_O} P - \rho_{r_O} C) = \rho_{r_O} P - \rho_{r_O} C + C, \end{aligned}$$

dunque, se P ha coordinate $\underline{x}$ e $\rho_r P$ ha coordinate $\underline{y}$:

$$\underline{y} = M_\theta \underline{x} + (\mathrm{Id} - M_\theta)\underline{c}.$$

7.4 Utilizzando quanto visto possiamo affermare che la matrice associata a $\rho_{r_O} \circ \rho_{s_O}$ è data dal prodotto:

$$\begin{aligned} M_\theta M_\phi &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta \cos 2\phi + \sin 2\theta \sin 2\phi & \cos 2\theta \sin 2\phi - \sin 2\theta \cos 2\phi \\ \sin 2\theta \cos 2\phi - \cos 2\theta \sin 2\phi & \cos 2\theta \cos 2\phi + \sin 2\theta \sin 2\phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta - 2\phi) & -\sin(2\theta - 2\phi) \\ \sin(2\theta - 2\phi) & \cos(2\theta - 2\phi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice ottunuta rappresenta la rotazione di un angolo $\psi = 2(\theta - \phi)$.
7.5 Falso: per quanto visto si ha $\rho_{r_O} \circ \rho_{s_O} = R_{O,\psi} \neq R_{O,-\psi} = \rho_{s_O} \circ \rho_{r_O}$.

Esercizio 8. facoltativo. Dimostrare il seguente notevole
Teorema (diagonalizzazione simultanea). Sia V uno spazio vettoriale e siano $T, S \in \mathrm{End}(V)$. Supponiamo che T e S siano diagonalizzabili. Verificare che esiste una base comune di autovettori se e solo se $T \circ S = S \circ T$.

Suggerimenti. Se esiste una base comune di autovettori allora è facile vedere che i due operatori commutano. La parte più difficile è il viceversa: se T e S sono diagonalizzabili e se $T \circ S = S \circ T$ allora esiste una base comune di autovettori. Provate ad usare il principio d?induzione sulla dimensione di V . Se $\dim V = 1$ la tesi del teorema è chiaramente vera. Sia $n = \dim V$. Supponiamo quindi che il risultato sia vero per spazi vettoriali di dimensione minore di n e dimostriamolo per spazi di dimensione n. Possiamo supporre che ad esempio $T \neq c\,\mathrm{Id}, c \in \mathbb{R}$ (perchè altrimenti il risultato sarebbe ovvio). Considerate gli autovalori di T ed i relativi autospazi. Dato che $T \neq c\,\mathrm{Id}$, $c \in \mathbb{R}$, la dimensione di ogni autospazio di T è strettamente minore di n. Usando la seconda ipotesi dimostrate che ognuno di questi autospazi è un sottospazio invariante per S. Ha senso quindi considerare la restrizione di S ad ognuno di questi autospazi. Dimostrate che ognuna di queste restrizioni è ancora un operatore diagonalizzabile; osservando poi che essa commuta con la restrizione di T all?autospazio (la quale è semplicemente uguale alla moltiplicazione per l?autovalore) concludete la dimostrazione.

Soluzione. Sia $\mathcal{C}$ una base comune di autovettori. Sia $\underline{c}$ un generico vettore in $\mathcal{C}$. Quindi esistono λ e μ tali che $\underline{c}$ è un autovettore per T di autovalore λ ed è un autovettore per S di autovalore μ. Dato che un operatore lineare è univocamente

determinato dai valori che assume su una base, basta verificare che $T \circ S(\underline{c}) = S \circ T(\underline{c})$ ma ciò è ovvio perché i due membri sono uguali a $\lambda\mu\underline{c}$.
In alternativa, se esiste una base comune di autovalori, scrivendo le matrici associate a T e a S in tale base, il loro prodotto commuta. Sia $\mathcal{B}$ la base diagonalizzante e $\mathcal{C}$ una qualsiasi altra base si ha che:

$$\begin{aligned}
{}_{\mathcal{C}}[T \circ S]_{\mathcal{C}} = &\ {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}\ {}_{\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}} = \ {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}\ {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \\
= &\ {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \ {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \\
= &\ {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}\ {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = \ {}_{\mathcal{C}}[S]_{\mathcal{C}}\ {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}} = =_{\mathcal{C}} [S \circ T]_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che le matrici associate commutano in qualsiasi base, dunque gli operatori commutano.
Per dimostrare il viceversa seguiamo il suggerimento. Dimostriamo dunque che ogni autospazio di T è invariante per S. Sia $V_\lambda(T)$ un autospazio per T di autovalore λ e $\underline{v} \in V_\lambda(T)$. Allora

$$T(S(\underline{v})) = T \circ S(\underline{v}) = S \circ T(\underline{v}) = \lambda S(\underline{v}),$$

dunque $S(\underline{v}) \in v_\lambda$, da cui si ha che

$$S(V_\lambda(T)) \subseteq V_\lambda(T) \quad \forall \lambda \quad \text{autovalore per } T. \tag{2}$$

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori di T, possiamo scrivere $V = V_{\lambda_1}(T) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}(T)$.
Per questioni grafiche scriviamo V_{λ_j} e non $V_{\lambda_j}(T)$
Ora, conviciamoci del fatto che effettivamente, se dimostriamo che la restrizione di S a ciascun autospazio per T è ancora diagonalizzabile, per induzione riusciamo a concludere. Dimostrare che la restizione di S agli autospazi per T è ancora diagonalizzabile permette di affermare che esistono basi $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ rispettivamente per i sottospazi $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$, tale che ogni $\mathcal{B}_i$ è composta da autovettori per $S|_{V_{\lambda_i}}$.
Ovviamente, la loro unione $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ è una base per V, i cui elementi sono autovettori sia per T, perché ciascun elemento appartiene a un autospazio V_{λ_i}, sia per S, per costruzione.
Vogliamo dunque mostrare che $S|_{V_{\lambda_i}}$ è ancora diagonalizzabile. Per farlo utilizzeremo il criterio di diagonalizzabilità di un operatore (Sernesi, Teorema 13.13). Siano $\{\mu_1, \ldots, \mu_\ell\}$ gli autovalori di S. Definiamo $\dim_{V_{\lambda_i}} = n_i = m_g(\lambda_i)$ per ogni i: vale ovviamente che $n_1 + \cdots + n_k = n = \dim V$. Siano ora A_i le matrici associate $S|_{V_{\lambda_i}}$ in basi $\mathcal{B}_i$ di autovettori per T, ciascuna di dimensione $n_i \times n_i$. Siccome per quanto visto gli autospazi per T sono stabili per S, la matrice di S nella base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ è a blocchi, della forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è dato dal prodotto dei polinomi caratteristici:

$$p_A(X) = \det(A_1 - X\,\mathrm{Id}_{n_1}) \ldots \det(A_k - X\,\mathrm{Id}_{n_k}).$$

Da questo segue che ciascuna restrizione $S|_{V_{\lambda_i}}$ ammette n_i autovalori nel campo, contati con la loro molteplicità (in caso contrario il polinomio caratteristico di S non ammetterebbe n radici nel campo (contando molteplicità), contro l'ipotesi.

Vediamo inoltre che l'unione degli autovalori degli $S|_{V_{\lambda_i}}$ dà tutti gli autovalori di S. Allora si ha che la somma delle dimensioni degli autospazi di ciascun $S|_{V_{\lambda_i}}$ deve essere pari a n_i: infatti, se cos non fosse, si avrebbe:

$$\sum_{j=1}^{\ell} \dim V_{\mu_j}(S) = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{k} \dim V_{\mu_j}(S|_{V_{\lambda_i}}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} \dim V_{\mu_j}(S|_{V_{\lambda_i}}) < \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

contro il criterio di diagonalizzabilità per l'operatore S.

Soluzione alternativa. Riprendiamo da (2).
Sia $\underline{w}$ un autovettore per S relativo all'autovalore μ. Allora, dato che $V = V_{\lambda_1}(T) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}(T)$, avremo che

$$\underline{w} = \underline{w}_1 + \cdots + \underline{w}_k \qquad \underline{w}_j \in V_{\lambda_j}(T)$$

e questa decomposizione è *unica* per definizione di somma diretta. Per definizione di autovettore esiste almeno un $\underline{w}_j$ diverso dal vettore nullo. Ovviamente avremo che

$$\mu\underline{w} = \mu\underline{w}_1 + \cdots + \mu\underline{w}_k$$

D'altra parte $\mu\underline{w} = S\underline{w}$ perchè $\underline{w}$ è un autovettore per S relativo a μ e ne segue che

$$\mu\underline{w} = S\underline{w}_1 + \cdots + S\underline{w}_k$$

Abbiamo visto che i sottospazi $V_{\lambda_j}(T)$ sono invarianti per S; quindi $S\underline{w}_j \in V_{\lambda_j}(T)$ $\forall j$. Per l'*unicità* della decomposizione deve essere

$$S\underline{w}_1 = \mu\underline{w}_1, \quad \ldots \quad , S\underline{w}_k = \mu\underline{w}_k$$

e quindi i $\underline{w}_j$ non nulli (ne esiste almeno uno) sono autovettori comuni a T ed a S. Applicando questo procedimento ad una base $\mathcal{F}$ di autovettori per S (questi sono in numero di n) si costruisce un insieme di vettori di V che ha cardinalità *almeno* uguale a n e che è costituito da autovettori *comuni.* Inoltre gli elementi di $\mathcal{F}$ sono ognuno combinazione lineare di questi autovettori comuni i quali, quindi, generano V. Ma allora possiamo estrarre da questo *insieme* di autovettori comuni una *base* di V e questa sarà, per costruzione, *una base di autovettori comuni ai due operatori.* Il teorema è dimostrato.