Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 4.
Consegna di un documento pdf entro il giorno 11/4
direttamente alla tutor Francesca Leonardi tramite email.

Esercizi di geometria affine. Parte 1

Consideriamo uno spazio affine A di dimensione 3 con riferimento affine $O\underline{e}_1\underline{e}_2\underline{e}_3$ fissato e coordinate associate (x, y, z).

Esercizio 1. È data la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Scrivere equazioni cartesiane per r. Dire se queste equazioni sono univocamente determinate.

Esercizio 2. Scrivere l'equazione cartesiana del piano per il punto $(0, 2, 0)$ e per la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

(Può essere utile il metodo del fascio.....)

Esercizio 3. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4, 1, 0)$ e complanare alle rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: la retta r cercata è intersezione di due piani...

Esercizio 4. Scrivere l'equazione del piano per la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

e parallelo alla retta di direzione $(11, 0, -1)$.

Complementi di algebra lineare: proiezioni e simmetrie.

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una sua decomposizione in somma diretta. Possiamo allora definire quattro operatori:
$P^{W_2}_{W_1}$ la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;
$P^{W_1}_{W_2}$, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1;
$S^{W_2}_{W_1}$, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;
$S^{W_1}_{W_2}$, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.
Per semplificare la notazione poniamo

$$P_1 := P^{W_2}_{W_1}\,, \quad P_2 := P^{W_1}_{W_2}\,, \quad S_1 := S^{W_2}_{W_1}\,, \quad S_2 := S^{W_1}_{W_2}$$

Questi operatori sono definiti come segue: ogni vettore $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo $P_1 : V \to V$

associando a $\underline{w} \in V$ il vettore $\underline{w}_1 \in V$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Analogamente: $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$ per definizione. Riassumendo:

$$P_1(\underline{w}) := \underline{w}_1, \quad P_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 .$$

Infine

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2, \quad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1 .$$

Se V è uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $<,>$ e $W_2 = (W_1)^\perp$ allora $P_1 = P_{W_1}$, la proiezione ortogonale su W_1; $P_2 = P_{(W_1)^\perp}$, la proiezione ortogonale su $(W_1)^\perp$. Analogamente S_1 è per definizione la simmetria ortogonale rispetto a W_1 e S_2 è la simmetria ortogonale rispetto a $(W_1)^\perp$.
Abbiamo già incontrato questi operatori nel secondo compito a casa.

Procedendo come per le proiezioni ortogonali e le simmetrie ortogonali negli spazi vettoriali euclidei è facile dimostrare che le applicazioni P_1, P_2, S_1, S_2 sono **lineari**. Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 e *non-ortogonali*; su un disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.

Esercizio 5. Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_1 + P_2 = \mathrm{Id} \tag{1}$$

$$S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id} \tag{2}$$

$$(S_1)^2 = \mathrm{Id}\,; \quad (S_2)^2 = \mathrm{Id} \tag{3}$$

In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$. Ritrovate queste relazioni sul vostro disegno.

Esercizio 6. Verificare che P_1 e P_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_1}(0) = W_2$, $V_{P_1}(1) = W_1$; $V_{P_2}(0) = W_1$, $V_{P_2}(1) = W_2$.
Verificare che S_1 e S_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_1}(1) = W_1$, $V_{S_1}(-1) = W_2$; $V_{S_2}(1) = W_2$, $V_{S_2}(-1) = W_1$.
Viceversa, verificare che se T è un operatore tale che $V_T(0) = W_2$ e $V_T(1) = W_1$ allora $T = P_1$. Analoghi enunciati valgono per P_2, S_1, S_2.

Esercizi di geometria affine. Parte 2

Esercizio 7. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^4(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato e sia S il sottospazio affine di equazioni cartesiane

$$X_1 + X_2 - X_3 = 2 \qquad X_2 + X_3 - X_4 = 1\,.$$

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ uguale a $\mathrm{Span}((1,0,-1,0),(2,0,0,2))$.
1. Dimostrare che è ben definito l'operatore di proiezione su S parallelamente a U, $P_{S,U}$.
2. Sia $\underline{t}$ un punto generico di $A^4(\mathbb{R})$. Determinare $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$P_{S,U}(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{c}$$

Facoltativo: Come possiamo descrivere geometricamente l'operatore lineare L_A : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$?

Esercizio 8.
Introduzione. Sia A uno spazio affine su V, S un sottospazio affine di giacitura W ed U un sottospazio vettoriale supplementare di W. Abbiamo definito, in generale, l'applicazione di proiezione su S parallelamente ad U, denotata $P_{S,U}$. L'applicazione $\Sigma_{S,U}$ di simmetria rispetto a S parallelamente a U è definita come segue: dato $P \in A$ definiamo $\Sigma_{S,U}(P)$ come il punto che soddisfa

$$-\overrightarrow{P_{S,U}(P)P} = \overrightarrow{P_{S,U}(P)\Sigma_{S,U}(P)}$$

Fate una figura in dimensione 2. *Fine Introduzione.*
Descrivere in coordinate questa applicazione nel caso in cui $A = A^4(\mathbb{R})$ e S ed U sono i sottospazi che compaiono nell'esercizio precedente verificando in particolare che $\Sigma_{S,U}$ è un'affinità . Più precisamente, trovare $B \in GL_4(\mathbb{R})$ e $\underline{d}$ tali che

$$\Sigma_{S,U}(\underline{t}) = B\underline{t} + \underline{d}\,.$$

Facoltativo: Come possiamo descrivere geometricamente l'operatore lineare $L_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$?

Esercizio 9. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Siano r, s, t e r', s', t' le rette di equazione

$$r : x = 1, \quad s : x = y, \quad t : y = -2$$

$$r' : 2x - y = 0, \quad s' : x = -y, \quad t' : 2x + y = 1$$

Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r'\,, \quad f(s) = s'\,, \quad f(t) = t'$$

ed in caso affermativo determinarla.
Suggerimento: può essere utile considerare le intersezioni di queste rette.....

Esercizio 10. Sia $\mathbf{A}$ un piano affine e siano A, B, C tre suoi punti non allineati. È definito allora T_{ABC}, il triangolo di vertici A, B, C:

$$T_{ABC} = \{P \in \mathbf{A} \mid \exists t \geq 0, u \geq 0, t + u \leq 1 \text{ tali che } \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}\}.$$

Fate una figura.
Sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbf{A})$. Dimostrare che è ben definito il triangolo $T_{f(A)f(B)f(C)}$ e che $f(T_{ABC}) \subset T_{f(A)f(B)f(C)}$.
Utilizzando f^{-1} dimostrate che si ha $f(T_{ABC}) = T_{f(A)f(B)f(C)}$. Dimostrare che dati due triangoli di $\mathbf{A}$ esiste un'affinità che trasforma il primo nel secondo. Tale affinità è unica ?