Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 4. Soluzioni.
A cura di Francesca Leonardi e Paolo Piazza.

Esercizi di geometria affine. Parte 1

Consideriamo uno spazio affine A di dimensione 3 con riferimento affine $O\underline{e}_1\underline{e}_2\underline{e}_3$ fissato e coordinate associate (x, y, z).

Esercizio 1. È data la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Scrivere equazioni cartesiane per r. Dire se queste equazioni sono univocamente determinate.

Soluzione. Un modo di procedere diretto è il seguente: dalla terza equazione ricaviamo $t = z - 3$, sostituendo questa espressione nella prima e nella seconda equazione otteniamo equazioni cartesiane per r:

$$\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

In alternativa, seguiamo la teoria. La retta passa per il punto $P_0 = (1, -2, 3)$, che corrisponde a $t = 0$, ed ha direzione $\underline{r} = (2, -1, 1)$. Un punto di coordinate (x, y, z) appartiene ad r se e solo se

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Orlando la sottomatrice 1×1 data dal 2 in seconda-riga prima-colonna, otteniamo che il rango è 1 se e solo se

$$\begin{cases} \det\begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \det\begin{vmatrix} x-1 & z-3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} .$$

ed otteniamo in questo modo equazioni cartesiane di r.

Le equazioni cartesiane non sono univocamente determinate. Ad esempio, nello svolgimento di questo esercizio con il primo metodo bastava esplicitare il parametro t dalla prima o dalla seconda equazione e sostituirlo nelle rimanenti per ottenere equazioni cartesiane diverse. Con il secondo metodo avremmo potuto orlare un elemento diverso della seconda riga della matrice. Più in generale, il motivo per cui le equazioni cartesiane di una retta non sono uniche è che una retta è definita geometricamente dall'intersezione di due piani distinti che la contengono: la scelta di questi non è unica (infatti per una retta passano infiniti piani).

Esercizio 2. Scrivere l'equazione cartesiana del piano per il punto $(0, 2, 0)$ e per la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

(Può essere utile il metodo del fascio.....)

Soluzione. Come suggerito, utilizziamo il metodo del fascio. Ogni piano che contiene la retta ha equazione cartesiana della forma:

$$\lambda(x - z - 3) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Troviamo i valori di questi parametri in modo che le coordinate del punto $(0, 2, 0)$ soddisfino l'equazione del piano, sostituendole nell'equazione del fascio:

$$-3\lambda + \mu = 0.$$

La coppia $(\lambda, \mu) = (1, 3)$ risolve l'equazione precendente, e dunque il piano cercato è quello che si ottiene sostituendo tali valori nell'equazione del fascio:

$$x + 3y + 5z - 6 = 0.$$

Esercizio 3. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4, 1, 0)$ e complanare alle rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: la retta r cercata è intersezione di due piani...

Soluzione. La retta cercata è l'intersezione del piano per il punto $(4, 1, 0)$ e la retta s e quello per lo stesso punto e la retta t, che indicheremo con rispettivamente con π_s e π_t. Procedimo come nella soluzione dell'esercizio precedente per determinare le equazioni di tali piani. Sappiamo che π_s è un piano del fascio di equazione

$$\lambda(x + 2z - 1) + \mu(y - z - 3) = 0.$$

Sostituendo le coordinate del punto $(4, 1, 0)$ per cui passa troviamo

$$3\lambda - 2\mu = 0$$

da cui otteniamo $(\lambda, \mu) = (2, 3)$. Dunque l'equazione cartesiana ottenuta è

$$\pi_s : 2x + 3y + z - 11 = 0.$$

Nello stesso modo cerchiamo l'equazione di π_t, che è un piano del fascio

$$\lambda(x - z - 2) + \mu(y + z) = 0.$$

Sostituendo le coordinate del punto $(4, 1, 0)$ otteniamo

$$2\lambda + \mu = 0,$$

che è soddisfatta dalla coppia $(\lambda, \mu) = (1, -2)$: Pertanto l'equazione cartesiana è

$$\pi_t : x - 2y - 3z - 2 = 0.$$

Siccome r si ottiene come intersezione di π_s e π_t le sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 11 = 0 \\ x - 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 4. Scrivere l'equazione del piano per la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

e parallelo alla retta di direzione $(11, 0, -1)$.

Soluzione. Osserviamo che r è la retta per il punto $P_0 = (1, -2, 3)$ (corrispondente al parametro $t = 0$) e di direzione $\underline{r} = (2, -1, 1)$. Il piano cercato è il piano che passa per P_0 ed ha giacitura

$$W = \mathrm{Span}(\underline{r}, (11, 0, -1)) .$$

Applicando quanto visto nella teoria otteniamo l'equazione cartesiana:

$$x + 13y + 11z - 8 = 0.$$

Complementi di algebra lineare: proiezioni e simmetrie.

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una sua decomposizione in somma diretta. Possiamo allora definire quattro operatori:
$P_{W_1}^{W_2}$ la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;
$P_{W_2}^{W_1}$, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1;
$S_{W_1}^{W_2}$, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;
$S_{W_2}^{W_1}$, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.
Per semplificare la notazione poniamo

$$P_1 := P_{W_1}^{W_2} , \quad P_2 := P_{W_2}^{W_1} , \quad S_1 := S_{W_1}^{W_2} , \quad S_2 := S_{W_2}^{W_1}$$

Questi operatori sono definiti come segue: ogni vettore $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo $P_1 : V \to V$ associando a $\underline{w} \in V$ il vettore $\underline{w}_1 \in V$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Analogamente: $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$ per definizione. Riassumendo:

$$P_1(\underline{w}) := \underline{w}_1, \quad P_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 .$$

Infine

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2, \quad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

Se V è uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $< , >$ e $W_2 = (W_1)^\perp$ allora $P_1 = P_{W_1}$, la proiezione ortogonale su W_1; $P_2 = P_{(W_1)^\perp}$, la proiezione ortogonale su $(W_1)^\perp$. Analogamente S_1 è per definizione la simmetria ortogonale rispetto a W_1 e S_2 è la simmetria ortogonale rispetto a $(W_1)^\perp$.
Abbiamo già incontrato questi operatori nel secondo compito a casa.

Procedendo come per le proiezioni ortogonali e le simmetrie ortogonali negli spazi vettoriali euclidei è facile dimostrare che le applicazioni P_1, P_2, S_1, S_2 sono **lineari**. Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 e *non-ortogonali*; su un disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.

Esercizio 5. Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1 ; \quad (P_2)^2 = P_2 ; \quad P_1 + P_2 = \mathrm{Id} \tag{1}$$

$$S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2 ; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id} \tag{2}$$

$$(S_1)^2 = \mathrm{Id} ; \quad (S_2)^2 = \mathrm{Id} \tag{3}$$

In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$. Ritrovate queste relazioni sul vostro disegno.

Soluzione.
(1) Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Calcoliamo la sua immagine tramite $(P_1)^2$:

$$(P_1)^2(\underline{w}) = P_1(P_1(\underline{w})) = P_1(P_1(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = P_1(\underline{w}_1) = \underline{w}_1 = P_1(\underline{w}),$$

perché, siccome $\underline{w}_1 \in W_1$, la sua decomposizione è data da $\underline{w}_1 = \underline{w}_1 + \underline{0}$, dunque $P_1(\underline{w}_1) = \underline{w}_1$.
La seconda identità è analoga:

$$(P_2)^2(\underline{w}) = P_2(P_2(\underline{w})) = P_2(P_2(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = P_2(\underline{w}_2) = \underline{w}_2 = P_2(\underline{w}).$$

Dimostriamo che $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}$. Sia $\underline{w} \in V$ di decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Abbiamo che:

$$P_1(\underline{w}) + P_2(\underline{w}) = P_1(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + P_2(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \underline{w} = \mathrm{Id}(\underline{w}),$$

per cui l'identità è dimostrata.
(2) Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$, allora

$$\mathrm{Id}(\underline{w}) - 2P_2(\underline{w}) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 - 2\underline{w}_2 = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 = S_1(\underline{w}),$$

dunque $S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2$. Similmente

$$2P_2(\underline{w}) - \mathrm{Id}(\underline{w}) = 2\underline{w}_2 - (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1 = S_2(\underline{w}),$$

da cui $S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}$.
(3) Sia $\underline{w} \in V$, con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$. Per definizione $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2$. La decomposizione di tale vettore è data da $S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 + (-\underline{w}_2)$, pertanto

$$(S_1)^2(\underline{w}) = S_1(S_1(\underline{w})) = S_1(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = \underline{w}_1 - (-\underline{w}_2) = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \underline{w} = \mathrm{Id}(\underline{w}).$$

Abbiamo quindi dimostrato che $(S_1)^2 = \mathrm{Id}$. L'identità $(S_2)^2 = \mathrm{Id}$ è analoga.

Esercizio 6. Verificare che P_1 e P_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_1}(0) = W_2$, $V_{P_1}(1) = W_1$; $V_{P_2}(0) = W_1$, $V_{P_2}(1) = W_2$.

Verificare che S_1 e S_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_1}(1) = W_1$, $V_{S_1}(-1) = W_2$; $V_{S_2}(1) = W_2$, $V_{S_2}(-1) = W_1$.

Viceversa, verificare che se T è un operatore tale che $V_T(0) = W_2$ e $V_T(1) = W_1$ allora $T = P_1$. Analoghi enunciati valgono per P_2, S_1, S_2.

Soluzione. Costruiamo una base per V, che sarà diagonalizzante per P_1 e per P_2 (e in secondo luogo per S_1 e S_2). Se $\dim V = n$ e $\dim W_1 = k$ (e dunque, essendo W_1 e W_2 in somma diretta, $\dim W_2 = n - k$), siano $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$ una base per W_1 e $(\underline{v}_{k+1}, \ldots, \underline{v}_n)$ una base per W_2. La loro unione $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ è una base per V (è un sistema di generatori perché $V = W_1 + W_2$, sono linearmente indipendenti perché la somma è diretta: $V = W_1 \oplus W_2$). Notiamo ora che

$$P_1(\underline{v}_j) = \begin{cases} \underline{v}_j & \text{se } 1 \leq j \leq k \\ \underline{0} & \text{se } k < j \leq n \end{cases}.$$

Notiamo immediatamente che la base costruita è una base di autovettori relativi agli autovalori 1 e 0, i cui autospazi associati sono $V_{P_1}(1) = W_1$ e $V_{P_1}(0) = W_2$. La dimostrazione dell'enunciato per P_2 è analoga.

Come abbiamo accennato la stessa base diagonalizza S_1 e S_2. Dimostriamo l'enunciato per il primo operatore, il secondo caso è analogo. Calcoliamo le immagini tramite S_1 dei vettori della base:

$$S_1(\underline{v}_j) = \begin{cases} \underline{v}_j & \text{se } 1 \leq j \leq k \\ -\underline{v}_j & \text{se } k < j \leq n \end{cases} .$$

La base costruita è una base di autovettori con autovalori 1 e -1 i cui relativi autospazi sono $V_{S_1}(1) = W_1$ e $V_{S_1}(-1) = W_2$.
Supponiamo infine che $V = W_1 \oplus W_2$ e $T : V \to V$ sia un operatore con $V_T(0) = W_2$ e $V_T(1) = W_1$. In particolare, $T|_{W_1} = \mathrm{Id}_{W_1}$ e $T|_{W_2} = 0$. Allora, siccome ciascun vettore di V si decompone in maniera unica in componenti negli autospazi W_1 e W_2. Sia $\underline{w} \in V$ con decomposizione $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$, calcoliamo

$$T(\underline{w}) = T(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = T(\underline{w}_1) + T(\underline{w}_2) = \underline{w}_1$$

perché $\underline{w}_1 \in W_1 = V_T(1)$ e $\underline{w}_2 \in W_2 = V_T(0)$. Per definizione di P_1 si ha che $T = P_1$.
I casi di P_2, S_1 e S_2 sono analoghi.

Esercizi di geometria affine. Parte 2

Esercizio 7. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^4(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato e sia S il sottospazio affine di equazioni cartesiane

$$X_1 + X_2 - X_3 = 2 \qquad X_2 + X_3 - X_4 = 1 .$$

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ uguale a $\mathrm{Span}((1,0,-1,0),(2,0,0,2))$.
1. Spiegare perché è ben definito l'operatore di proiezione su S parallelamente a U, $P_{S,U}$.
2. Sia $\underline{t}$ un punto generico di $A^4(\mathbb{R})$. Determinare $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$P_{S,U}(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{c}$$

Facoltativo: Come possiamo descrivere geometricamente l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$?

Soluzione.
La giacitura associata a S è il sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane

$$X_1 + X_2 - X_3 = 0 \qquad X_2 + X_3 - X_4 = 0 .$$

È immediato che $\dim W = 2$ (infatti la matrice dei coefficienti del sistema ha rango 2 dato che le 2 equazioni del sistema sono non-proporzionali). È anche chiaro che U ha dimensione 2 perché $(1,0,-1,0)$ e $(2,0,0,2)$ sono non-proporzionali. Per rispondere alla prima domanda occorre verificare che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ (si veda il Sernesi, p. 111; in tal caso $P_{S,U}(\underline{t})$ è ottenuto come il punto d'intersezione fra S ed il piano per $\underline{t}$ di giacitura U, denotato $T_{\underline{t},U}$).
Per Grassmann è sufficiente verificare che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ perché allora $\dim(U+W) = 2+2-0 = 4$ e quindi $U + W = \mathbb{R}^4$. In alternativa, e sempre per Grassmann, basta verificare che $U + W = \mathbb{R}^4$. Equazioni cartesiane di U si scrivono "ad occhio" e sono

$$X_1 + X_3 = 0 \qquad X_2 - X_4 = 0 .$$

Mettendo a sistema con le equazioni di W verifichiamo facilmente che $U \cap W = \{\underline{0}\}$.
In alternativa fissiamo una base di W, ad esempio,

$$(2,-1,1,0) \qquad (-1,1,0,1)$$

e verifichiamo che i quattro vettori

$$(2,-1,1,0) \qquad (-1,1,0,1) \qquad (1,0,-1,0) \qquad (2,0,0,2)$$

sono linearmente indipendenti.
Passiamo al punto 2. Chiamiamo $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ i due vettori generatori di U:

$$\underline{w}_1 := (1,0,-1,0) \qquad \underline{w}_2 := (2,0,0,2)\,.$$

Per determinare A e $\underline{c}$ scriviamo le equazioni parametriche del piano per $\underline{t}$ e di giacitura U, piano che abbiamo denotato $T_{\underline{t},U}$. Questo è il piano affine di equazioni parametriche

$$\underline{x} = \underline{t} + \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2\,, \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

Al variare di α e β in $\mathbb{R}$ otteniamo tutti i punti di $T_{\underline{t},U}$ e sappiamo dalla teoria che, fissato $\underline{t}$, esistono unici (α_0,β_0) tali che

$$S \cap T_{\underline{t},U} = \underline{t} + \alpha_0\underline{w}_1 + \beta_0\underline{w}_2\,.$$

Per determinare α_0 e β_0 imponiamo che la quadrupla $\underline{t} + \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2$ soddisfi le equazioni cartesiane di S. Otteniamo le due equazioni

$$(t_1+\alpha+2\beta) + t_2 - (t_3-\alpha) = 2\,, \qquad t_2 + (t_3-\alpha) - (t_4-2\beta) = 1\,.$$

Risolvendo in α e β otteniamo infine α_0 e β_0 (ovviamente in funzione di $\underline{t}$) e risostituendo questi valori nelle coordinate del generico punto di $T_{\underline{t},U}$ otteniamo la quadrupla

$$\begin{vmatrix} t_1+t_2+t_3-t_4-1 \\ t_2 \\ t_1+2t_2+t_3-t_4-3 \\ t_1+3t_2+t_3-t_4-4 \end{vmatrix}$$

da cui si ricaviamo immediatamente A e $\underline{c}$.
La matrice A è la matrice associata nella base standard all'operatore di proiezione su W parallelamente a U (applicare l'ultima parte dell'esercizio 6).

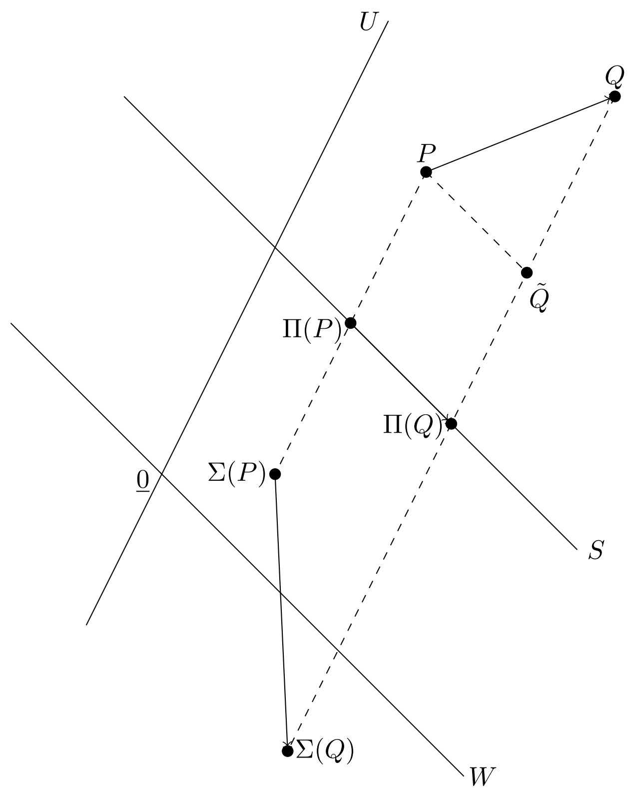
Esercizio 8.
Introduzione. Sia A uno spazio affine su V, S un sottospazio affine di giacitura W ed U un sottospazio vettoriale supplementare di W. Abbiamo definito, in generale, l'applicazione di proiezione su S parallelamente ad U, denotata $P_{S,U}$. L'applicazione $\Sigma_{S,U}$ di simmetria rispetto a S parallelamente a U è definita come segue: dato $P \in A$ definiamo $\Sigma_{S,U}(P)$ come il punto che soddisfa

$$-\overrightarrow{P_{S,U}(P)P} = \overrightarrow{P_{S,U}(P)\Sigma_{S,U}(P)}$$

Fate una figura in dimensione 2. *Fine Introduzione.*
Descrivere in coordinate questa applicazione nel caso in cui $A = A^4(\mathbb{R})$ e S ed U sono i sottospazi che compaiono nell'esercizio precedente verificando in particolare che $\Sigma_{S,U}$ è un'affinità . Più precisamente, trovare $B \in GL_4(\mathbb{R})$ e $\underline{d}$ tali che

$$\Sigma_{S,U}(\underline{t}) = B\underline{t} + \underline{d}\,.$$

Facoltativo: Come possiamo descrivere geometricamente l'operatore lineare L_B : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$?



Soluzione.
Per definizione
$$-(\underline{t} - P_{S,U}(\underline{t})) = \Sigma_{S,U}(\underline{t}) - P_{S,U}(\underline{t})$$
che riscriviamo come
$$\Sigma_{S,U}(\underline{t}) = 2P_{S,U}(\underline{t}) - \underline{t}.$$
Da qui seguono subito B e $\underline{d}$: $B = 2A - I_4$ e $\underline{d} = 2\underline{c}$. Non è difficile dimostrare che $\det B \neq 0$ e che quindi $\Sigma_{S,U}$ è un'affinità.
B è la matrice associata nella base standard di $\mathbb{R}^4$ all'operatore di simmetria rispetto a W parallelamente a U (applicare l'ultima parte dell'esercizio 6).

Complementi su proiezioni e simmetrie negli spazi affini.

Questi complementi sono facoltativi.
Sia A un qualsiasi spazio affine, S un suo sottospazio affine, $W \subset V$ la giacitura di S e $U \subset V$ un sottospazio vettoriale di V tale che $V = W \oplus U$. Abbiamo definito le applicazioni $P_{S,U} : A \to A$, la proiezione su S parallelamente ad U e $\Sigma_{S,U} : A \to A$, la simmetria rispetto ad S parallelamente ad U.
Vogliamo far vedere che $\Sigma_{S,U} : A \to A$ è un'affinità, con automorfismo associato $\phi : V \to V$ uguale a $S_W^U : V \to V$, la simmetria rispetto a W parallelamente a U.

Notiamo innanzitutto che per ogni punto nello spazio affine $P \in A$ vale l'uguaglianza
$$-\overrightarrow{P_{S,U}(P)P} = \overrightarrow{P_{S,U}(P)\Sigma_{S,U}(P)}$$

(che definisce $\Sigma_{S,U}(P)$) se e solo se

$$\overrightarrow{PP_{S,U}(P)} + \overrightarrow{(-P_{S,U}(P))P} = \overrightarrow{PP_{S,U}(P)} + \overrightarrow{P_{S,U}(P)\Sigma_{S,U}(P)}$$

se e solo se

$$\overrightarrow{PP_{S,U}(P)} + \overrightarrow{(-P_{S,U}(P))P} = \overrightarrow{P\Sigma_{S,U}(P)}$$

se e solo se

$$-2\overrightarrow{P_{S,U}(P)P} = \overrightarrow{P\Sigma_{S,U}(P)}. \tag{4}$$

Siano ora $P, Q \in A$. D'ora in poi, per alleggerire le notazioni, scriveremo Π per indicare la proiezione $P_{S,U}$ e Σ per la simmetria $\Sigma_{S,U}$. Consideriamo la figura riportata qui sopra.
Utilizzando la relazione (4) otteniamo (aiutatevi con la figura)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Sigma(Q)\Sigma(P)} &= \overrightarrow{\Sigma(Q)Q} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{P\Sigma(P)} = -\overrightarrow{Q\Sigma(Q)} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{P\Sigma(P)} = \\ &= 2\overrightarrow{\Pi(Q)Q} + \overrightarrow{QP} - 2\overrightarrow{\Pi(P)P} = 2\overrightarrow{\Pi(Q)Q} + \overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{P\Pi(P)} = \\ &= 2\overrightarrow{\Pi(Q)Q} + 2\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{P\Pi(P)} - \overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{\Pi(Q)\Pi(P)} - \overrightarrow{QP}.\end{aligned}$$

Se dimostriamo che

$$\overrightarrow{\Pi(Q)\Pi(P)} = P_W^U(\overrightarrow{QP})$$

allora otteniamo che

$$\overrightarrow{\Sigma(Q)\Sigma(P)} = (2P_W^U - \mathrm{Id}_V)(\overrightarrow{QP})$$

che è la tesi (sappiamo che $S_W^U = 2P_W^U - \mathrm{Id}_V$ dall'esercizio 5).

D'altra parte, sia $\tilde{Q} \in A$ il punto ottenuto come intersezione del sottospazio affine per Q di giacitura U e del sottospazio affine per P di giacitura W. Per definizione si ha che $\overrightarrow{P\tilde{Q}} \in W$ e $\overrightarrow{\tilde{Q}Q} \in U$. Abbiamo quindi (vedere la figura),

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P\tilde{Q}} + \overrightarrow{\tilde{Q}Q} = \overrightarrow{P\Pi(P)} + \overrightarrow{\Pi(P)\Pi(Q)} + \overrightarrow{\Pi(Q)\tilde{Q}} + \overrightarrow{\tilde{Q}Q} = \overrightarrow{P\Pi(P)} + \overrightarrow{\Pi(P)\Pi(Q)} + \overrightarrow{\Pi(Q)Q}.$$

Ora, siccome $\overrightarrow{P\Pi(P)} \in U$ e $\overrightarrow{\Pi(Q)Q} \in U$, ponendo $\underline{u} = \overrightarrow{P\Pi(P)} + \overrightarrow{\Pi(Q)Q}$, si ha che

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\Pi(P)\Pi(Q)} + \underline{u}$$

che è la decomposizione (unica) del vettore $\overrightarrow{PQ}$ in componenti nei sottospazi W e U. Nelle notazioni introdotte negli esercizi 5 e 6 otteniamo che

$$\overrightarrow{\Pi(P)\Pi(Q)} = P_W^U(\overrightarrow{PQ})$$

che ci dà, come già osservato,

$$\overrightarrow{\Sigma(Q)\Sigma(P)} = \left(2P_W^U - \mathrm{Id}\right)(\overrightarrow{QP})$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Esercizio 9. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Siano r, s, t e r', s', t' le rette di equazione

$$r : x = 1, \quad s : x = y, \quad t : y = -2$$

$$r' : 2x - y = 0, \quad s' : x = -y, \quad t' : 2x + y = 1$$

Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f(t) = t'$$

ed in caso affermativo determinarla.

Soluzione. Le tre rette r, s e t non appartengono allo stesso fascio e sono palesemente non-parallele due a due. Determinano quindi 3 punti non allineati:

$$P_0 = r \cap s\,, \quad P_1 = s \cap t\,, \quad P_2 = r \cap t$$

ed è immediato verificare che

$$P_0 = (1,1)\,, \quad P_1 = (-2,-2)\,, \quad P_2 = (1,-2).$$

Notiamo che

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (-3,-3)\,, \quad \overrightarrow{P_0P_2} = (0,-3),$$

due vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ che sono linearmente indipendenti come deve essere. Analogamente si verifica che r', s', t' determinano con le loro intersezioni 3 punti non-allineati Q_0, Q_1 Q_2 dati esplicitamente da:

$$Q_0 = (0,0)\,, \quad Q_1 = (1,-1)\,, \quad Q_2 = (1/4, 1/2)$$

Notiamo anche qui che

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = (1,-1)\,, \quad \overrightarrow{Q_0Q_2} = (1/4, 1/2),$$

un'altra coppia di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$. Riassumendo, le due triple di punti $\{P_0, P_1, P_2\}$ e $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ sono 2 triple di punti indipendenti ed esiste quindi unica l'affinità che porta P_j in Q_j. Dato che un'affinità trasforma rette in rette è chiaro che questa affinità è quella che porta r in r', s in s' e t in t' e cioè l'affinità cercata.

Determiniamo questa affinità.

Sappiamo dalla teoria che se ϕ è l'isomorfismo associato a f e se $\underline{c} = f(0,0)$ allora, detta A la matrice associata a ϕ nella base standard $\mathcal{E}$, si ha

$$f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{c}$$

Dobbiamo determinare A e $\underline{c}$. Ma ϕ verifica, per definizione,

$$\phi(\overrightarrow{P_0P_j}) = \overrightarrow{f(P_0)f(P_j)}$$

e quindi

$$\phi(-3,-3) = (1,-1)\,, \quad \phi(0,-3) = (1/4, 1/2)$$

da cui (classico) $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = A$ con

$$A = \begin{vmatrix} -1/4 & -1/12 \\ 1/2 & -1/6 \end{vmatrix}$$

Rimane da determinare $f(0,0)$. Ma per ogni $\underline{x} \in A^2(\mathbb{R})$ si ha

$$\overline{f(0,0)f(\underline{x})} = \phi(\underline{x} - (0,0)) = \phi(\underline{x})$$

e quindi scegliendo $\underline{x} = (1,1) = P_0$ otteniamo

$$f(1,1) - f(0,0) = \phi(1,1)$$

che ci dà

$$f(0,0) = f(1,1) - A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

e quindi $f(0,0) = (0,0) - (-1/3, 1/3)$. Concludiamo che l'affinità cercata è data da $f_{A,\underline{c}}$ con $A = \begin{vmatrix} -1/4 & -1/12 \\ 1/2 & -1/6 \end{vmatrix}$ e $\underline{c} = (1/3, -1/3)$.

Esercizio 10. Sia $\mathbf{A}$ un piano affine e siano A, B, C tre suoi punti non allineati. È definito allora T_{ABC}, il triangolo di vertici A, B, C:

$$T_{ABC} = \{P \in \mathbf{A} \,|\, \exists t \geq 0, u \geq 0, t+u \leq 1 \text{ tali che } \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}\}.$$

Fate una figura.
Sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbf{A})$. Dimostrare che è ben definito il triangolo $T_{f(A)f(B)f(C)}$ e che $f(T_{ABC}) \subset T_{f(A)f(B)f(C)}$.
Utilizzando f^{-1} dimostrate che si ha $f(T_{ABC}) = T_{f(A)f(B)f(C)}$. Dimostrare che dati due triangoli di $\mathbf{A}$ esiste un'affinità che trasforma il primo nel secondo. Tale affinità è unica ?

Soluzione.
Un'affinità manda punti non-allineati in punti non-allineati (perché l'automorfismo associato $\phi \in \mathrm{End}(V)$ manda i vettori linearmente indipendenti $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ in vettori linearmente indipendenti); quindi è ben definito il triangolo $T_{f(A)f(B)f(C)}$. Dimostriamo che $f(T_{ABC}) \subset T_{f(A)f(B)f(C)}$. Sia $\phi : V \to V$ l'isomorfismo associato a f. Sia $P \in T_{ABC}$; vogliamo dimostrare che $f(P) \in T_{f(A)f(B)f(C)}$. Per ipotesi

$$\exists\, t \geq 0, u \geq 0, t+u \leq 1 \text{ tali che } \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}\,.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)f(P)} &= \phi(\overrightarrow{AP}) \\ &= \phi(t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}) \\ &= t\phi(\overrightarrow{AB}) + u\phi(\overrightarrow{AC}) \\ &= t\overrightarrow{f(A)f(B)} + u\overrightarrow{f(A)f(C)} \end{aligned}$$

e quindi $f(P) \in T_{f(A)f(B)f(C)}$. Sia ora $Q \in T_{f(A)f(B)f(C)}$. Rimane da dimostrare che $Q \in f(T_{ABC})$. Ma sappiamo che f è bigettiva e che f^{-1} è ancora un'affinità. Quindi, per quanto appena dimostrato

$$f^{-1}(T_{f(A)f(B)f(C)}) \subset T_{f^{-1}(f(A))f^{-1}(f(B))f^{-1}(f(C)} \equiv T_{ABC}$$

In particolare $f^{-1}(Q) \in T_{ABC}$ e, ovviamente, $f(f^{-1}(Q)) = Q$. Quindi $Q \in f(T_{ABC})$ e la dimostrazione è completa.

Se abbiamo due triangoli T_{ABC} e $T_{A'B'C'}$ allora abbiamo la tripla di punti linearmente indipendenti $\{A, B, C\}$ e la tripla di punti linearmente indipendenti $\{A', B', C'\}$. Sappiamo che esiste unica l'affinità che porta A in A', B in B' e C in C'. È facile vedere che questa affinità porta T_{ABC} in $T_{A'B'C'}$. Quindi esiste $f \in \mathrm{Aff}(A)$ tale che $f(T_{ABC}) = T_{A'B'C'}$. Non è unica perché l'affinità g che porta, ad esempio, A in B', B in C' e C in A' è anche tale che $g(T_{ABC}) = T_{A'B'C'}$.