Geometria I. a.a. 2019-20. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Foglio di Esercizi n. 3.
Consegna di un documento pdf entro il 26/3/2020, ore 11,
direttamente alla tutor Francesca Leonardi tramite email.

Esercizio 1. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ ortonormale con coordinate associate $\underline{x}$. Sia U un sottospazio di dimensione $n-1$ di equazioni cartesiane

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

1.1. Dare le coordinate di un generatore per il sottospazio di dimensione 1 uguale a $U^{\perp}$.
Sia in particolare $(V, <\,,\,>) = (\mathbb{R}^6, \bullet)$ e sia U l'iperpiano di equazioni

$$x_1 + \cdots + x_6 = 0$$

1.2. Determinare la matrice associata nella base standard all'operatore di proiezione ortogonale su U.
Suggerimento: siate furbi.

Esercizio 2.
Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo oppure uno spazio vettoriale hermitiano. Sia T un endomorfismo. Abbiamo visto (nel caso euclideo, ma esattamente la stessa dimostrazione funziona nel caso hermitiano) che esiste un unico operatore $T^* \in \mathrm{End}(V)$, detto aggiunto di T, tale che

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T^*\underline{w} >, \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V. \tag{1}$$

Abbiamo anche visto che se $\mathcal{G}$ è una base ortonormale allora

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T^*) = (M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T))^T \text{ se } (V, <\,,\,>) \text{ è euclideo}$$

e la stessa dimostrazione stabilisce che

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T^*) = (\overline{M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(T)})^T \text{ se } (V, <\,,\,>) \text{ è hermitiano.}$$

Fissiamo una *qualsiasi* base $\mathcal{B}$. Sia A la matrice associata a T in questa base, $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, e sia S la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base, $S := A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}$.
Sia infine A^* la matrice dell'operatore aggiunto T^* nella base $\mathcal{B}$, $A^* = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^*)$.
2.1. *Scrivere una formula che esprima A^* in termini di S ed A.*
(Le formule sono diverse a seconda che $(V, <\,,\,>)$ sia uno spazio vettoriale euclideo oppure uno spazio vettoriale hermitiano.)
Suggerimento: scrivere (1) in coordinate.
2.2 Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo. Completare le seguenti proposizioni e dimostrarle:
Proposizione. T è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione......
Proposizione. T è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione......
2.3 Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale hermitiano. Completare le seguenti proposizioni e dimostrarle:
Proposizione. T è un operatore unitario se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione......

Proposizione. T è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione......

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $[-\pi, \pi]$ in $\mathbb{R}$. Sia W il sottospazio vettoriale di V definito da $W = \text{Span}(\sin x, \cos x)$.

(i) Dimostrare che la dimensione di W è 2.

(ii) Dimostrare che la forma $<,>: W \times W \to \mathbb{R}$ definita da

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

è un prodotto scalare definito positivo e che $\{\sin x, \cos x\}$ è una base ortogonale per tale prodotto scalare.

(iii) Verificare che $\{\sin x, \sin(x + \frac{\pi}{4})\}$ è una base di W. Ortonormalizzare tale base con il procedimento di Gram-Schmidt rispetto al prodotto scalare di (ii).

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{C}^2$ con prodotto hermitiano canonico. Sia $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore L_A con

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}$$

4.1 Spiegare perché T è diagonalizzabile con base diagonalizzante ortonormale.
4.2 Determinare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di T.
4.3 Stabilire se tale base è unica.
4.4 Determinare una matrice unitaria U ed una matrice diagonale Δ tali che $U^{-1}AU = \Delta$.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

5.1 Verificare che l'applicazione $< \, , \, >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $< \underline{x}, \underline{y} >= \underline{x}^T S \underline{y}$ è un prodotto scalare definito positivo.

5.2 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore L_A con $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Stabilire se T è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare definito in **5.1**.

Esercizio 6. Consideriamo l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Dire se può esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e T sia un operatore simmetrico.

(ii) Dire se può esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e T sia un operatore ortogonale.

(iii) Determinare, se esiste, un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale T è simmetrico[1]

---

[1] Scrivere la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di un generico prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Quale è la condizione su A e B affinché T sia simmetrico ?

Esercizio 7. Dimostrare il seguente risultato
Decomposizione spettrale: Sia T un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale euclideo o hermitiano $(V, < , >)$. Siano $V_T(\lambda_1), \dots, V_T(\lambda_k)$ gli autospazi distinti di T e sia $P_{V_T(\lambda_i)}$ l'operatore di proiezione ortogonale su $V_T(\lambda_i)$. Verificare che vale la seguente identità in End(V):

$$T = \lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)}.$$

Suggerimento: fissate un'opportuna base dello spazio e verificate che i due membri di questa uguaglianza operano allo stesso modo su questa base.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $< , >$.
8.1. Verificate che una simmetria ortogonale rispetto ad un sottospazio è un operatore ortogonale in $(V, < , >)$.
8.2. Verificare che se P è un operatore di proiezione *ortogonale* su un sottospazio W, $P \equiv P_W$, allora P è simmetrico.

Esercizio 9. Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$. con $\bullet$ il prodotto scalare standard. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Determinare una base **ortonormale** di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ che diagonalizzi questa forma quadratica. Scrivere l'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate. Determinare una base ortonormale rispetto alla quale la forma quadratica si scriva nella sua *forma canonica euclidea.* Determinare infine una base rispetto alla quale la forma quadratica si scriva nella sua *forma canonica affine.*